2010年4月9日（金） 第1時限

平成22年度 物質科学解析 第7回

複素数

冨田知志

０. なぜ複素数か？
１. 虚数単位 i
２. 複素数の計算
３. オイラーの公式
４. 複素平面
５. 級数での複素数（オイラーの公式）の活用
６. 量子力学で出てくる複素数の例

0. なぜ複素数か？

量子論（量子力学）で不可欠だから

参照：光ナノサイエンスコアI

古典論や電気回路でも複素数は使う

ただしそれはあくまでも数学的道具

（まあ、それはそれで良いのですが）

量子力学は複素数を使わないと記述不可能

「*自然科学における数学の不合理なまでの有効さ*」

“*The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*”

Eugene Paul Wigner

1. 虚数単位　i

1-1　$i^2 =$

1-2　$i^3 =$

1-3　$i^4 =$

1-1 $i^2 = -1$

1-2 $i^3 = -i$

1-3 $i^4 = 1$

２. 複素数

複素数 $z = a + ib$

$\mathrm{Re}[z] = a$ ：zの実部

$\mathrm{Im}[z] = b$ ：zの虚部

zの共役複素数 $z^* = a - ib$

$$z \times z^* = (a + ib) \times (a - ib) = a^2 + b^2$$

２． 複素数の加減乗除

2-1 $(1+2i)+(2-3i)=$

2-2 $(1+2i)-(2-3i)=$

2-3 $(1+2i)\times(2-3i)=$

2-4 $\dfrac{1+2i}{2-3i}=$

2-1 $(1+2i)+(2-3i)$

$= (1+2)+(2-3)i = 3-i$

2-2 $(1+2i)-(2-3i)$

$= 1+2i-2+3i$

$= (1-2)+(2+3)i = -1+5i$

2-3 $(1+2i)\times(2-3i)$

$$= (1\times 2) + \{1\times(-3i)\}$$

$$+ (2i\times 2) + \{2i\times(-3i)\}$$

$$= 2 - 3i + 4i + 6 = 8 + i$$

iをただの数のようにみなし、
普通に計算すれば良い

必要に応じて、$i^2=-1$を用いる

2-4

$$\frac{1+2i}{2-3i}$$

分母の共役複素数を
分母、分子にかける

$$= \frac{(1+2i)\times(2+3i)}{(2-3i)\times(2+3i)}$$

$$= \frac{2-6+4i+3i}{4+9}$$

$$= \frac{-4+7i}{13}$$

2-5 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

2-5 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times i\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+i^2\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{2}{4}-\frac{2}{4}+i\frac{2}{4}+i\frac{2}{4}$$

$$=i$$

３. オイラーの公式（恒等式）

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$e = 2.71828\cdots$: 自然対数の底

複素共役

$$\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

3-1 $e^{i\pi} =$

3-2 $e^{i2\pi} =$

3-3 $e^{i\frac{\pi}{2}} =$

3-4（発展） 公式集の式(4.10)、(4.13)、(4.14)を用いて、オイラーの公式を導いてみる

3-5（発展） オイラーの公式を用いて、三角関数の和の公式(2.30)、(2.31)導いてみる

3-1

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$
$$= -1 + 0 = -1$$

3-2

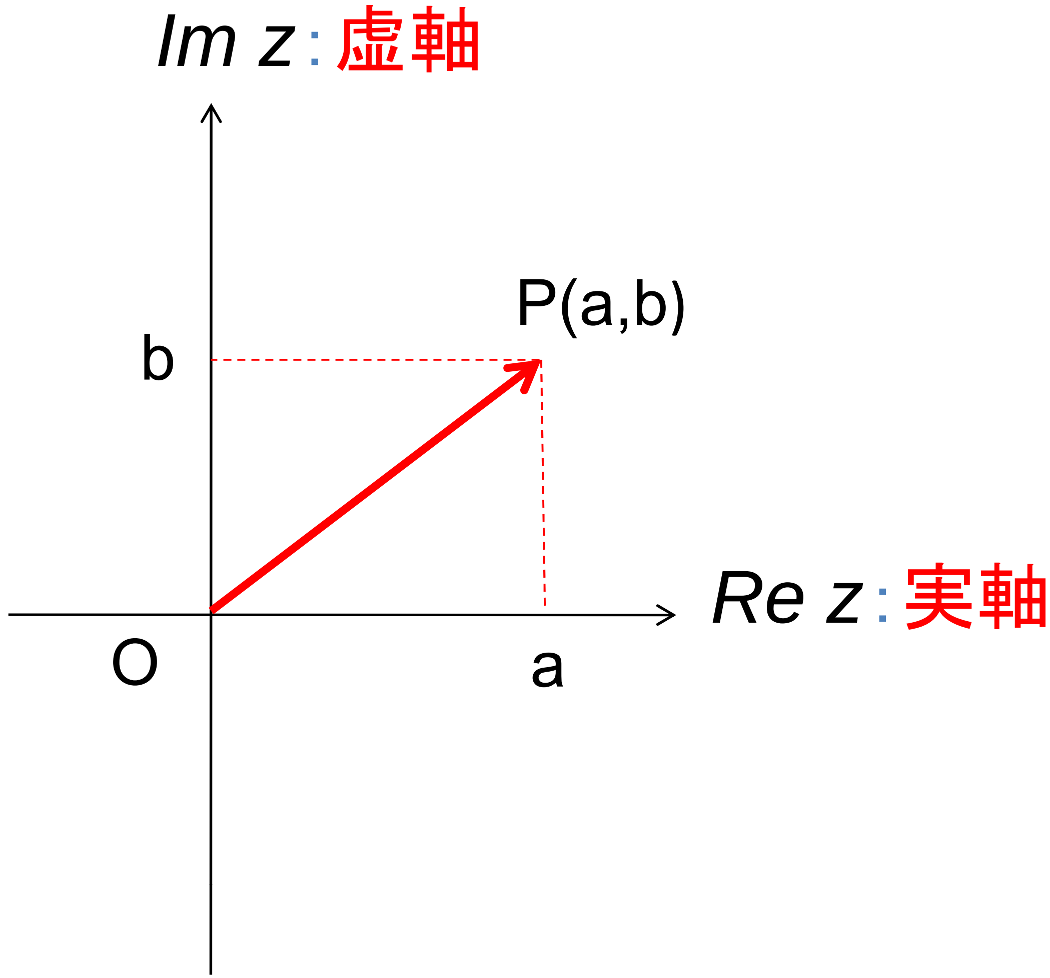
$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$
$$= 1 + 0 = 1$$

3-3

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= 0 + i1 = i$$

4. 複素平面(ガウス平面)

$$z = a + ib$$

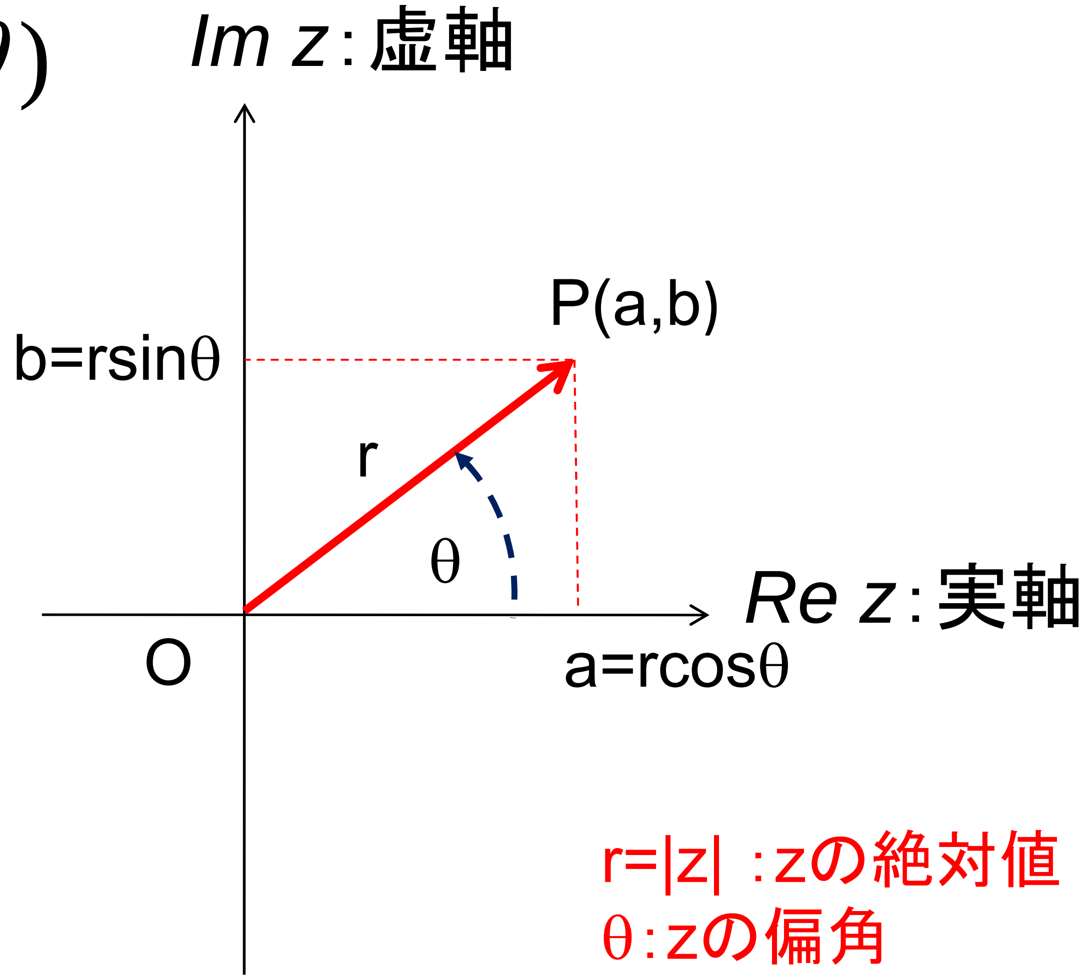


$$z = a + ib$$

$$= r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= re^{i\theta}$$



r=|z| :zの絶対値
θ:zの偏角

$$z = a + ib$$

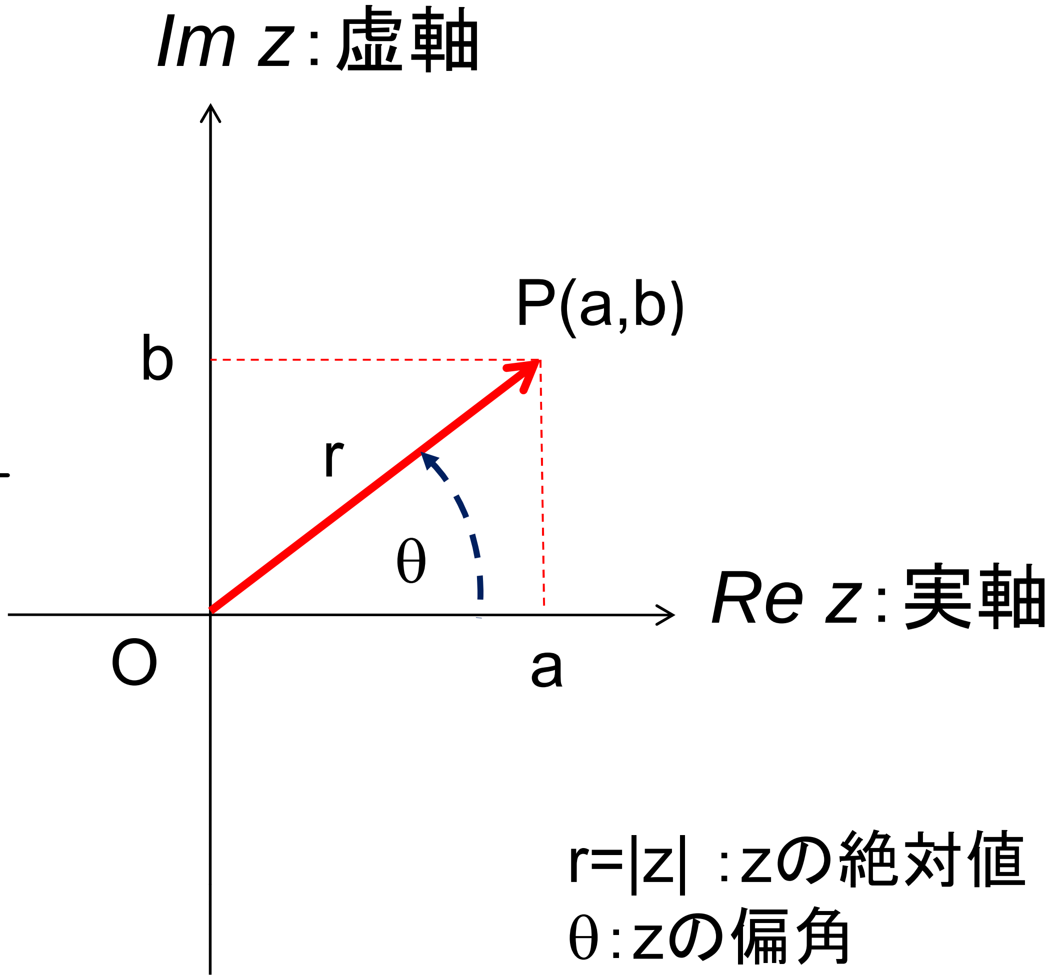
$$= r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= re^{i\theta}$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

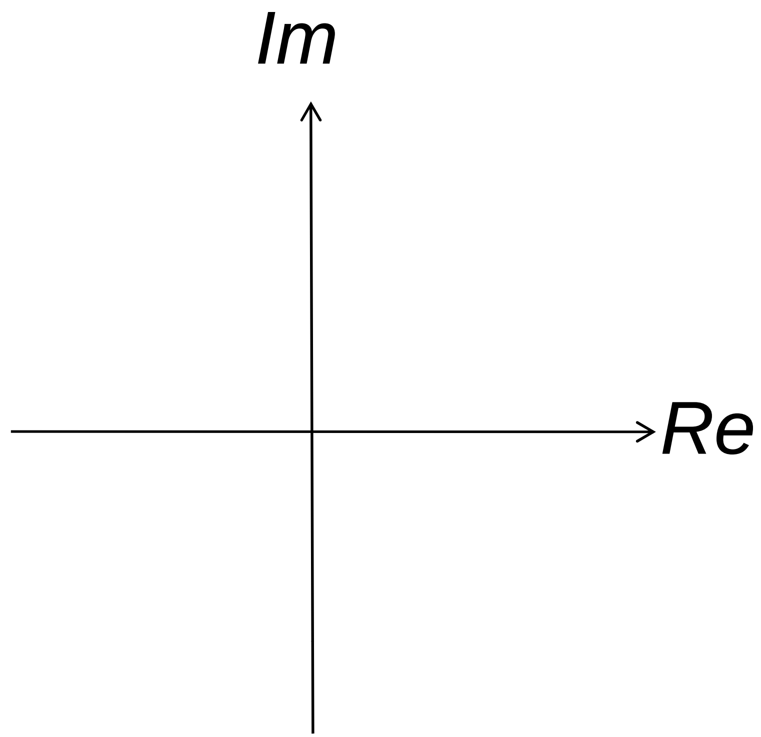
$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$



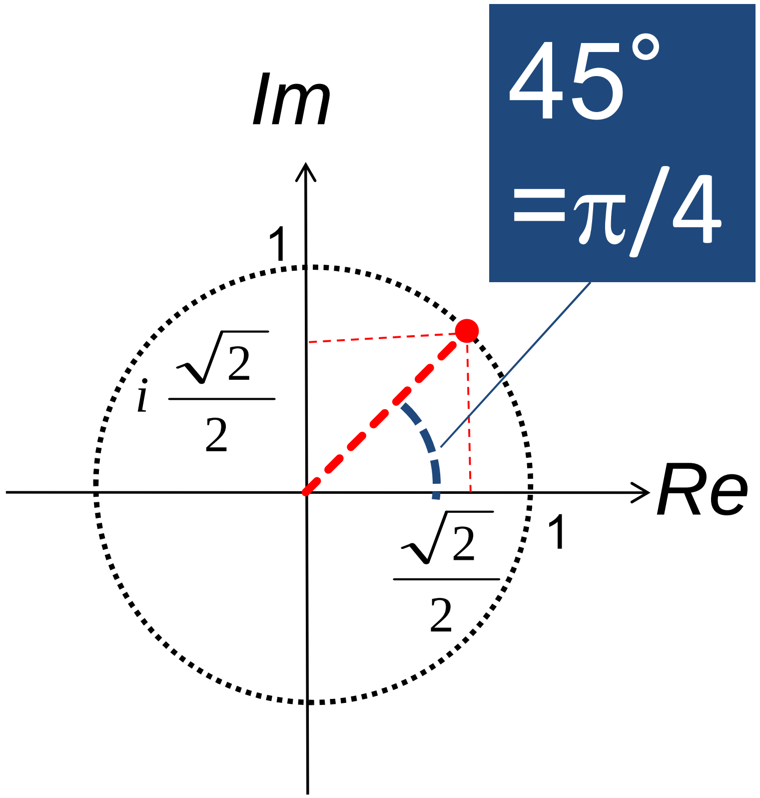
r=|z| : zの絶対値
θ : zの偏角

4-1 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

を複素平面上に図示せよ



4-1 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



4-2 $e^{i\frac{\pi}{4}}$ を複素平面上に図示せよ

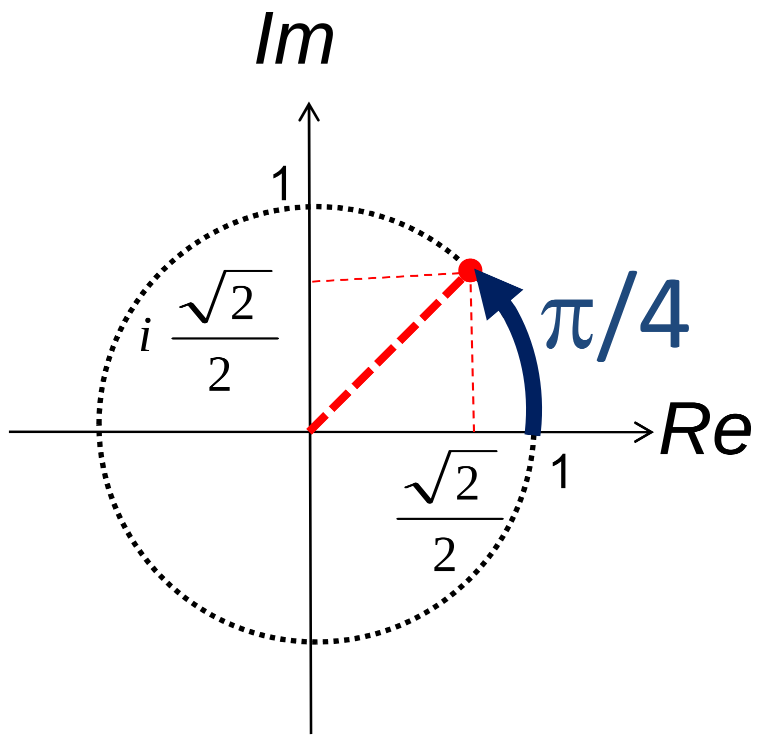
4-3 $e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

を複素平面上に図示せよ

4-2

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

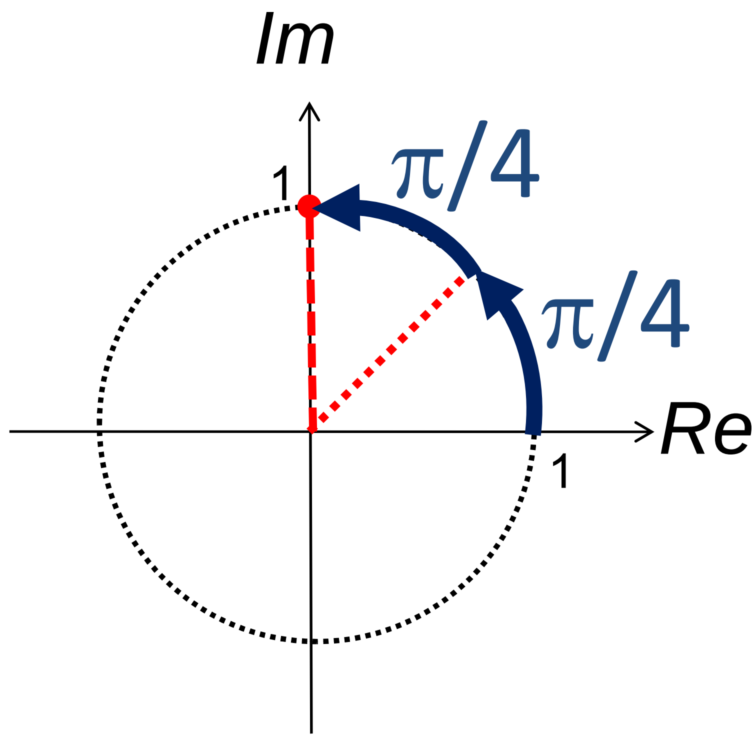


4-3 $e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}\times 2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 + i = i$$

複素数の掛け算は
“複素平面上での回転”
のイメージ



５. ライプニッツの級数

$$1$$

$$1-\frac{1}{3}=$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=$$

５．ライプニッツの級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$$

$$1$$

$$1 - \frac{1}{3} = 0.666667 \quad \cdots$$

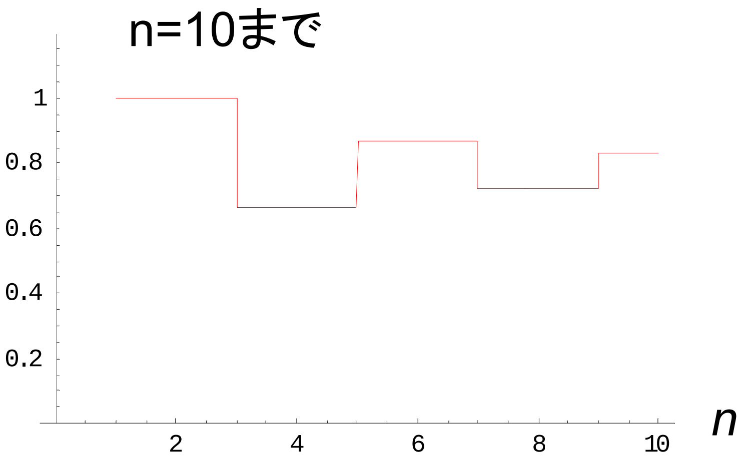
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 0.866667 \quad \cdots$$

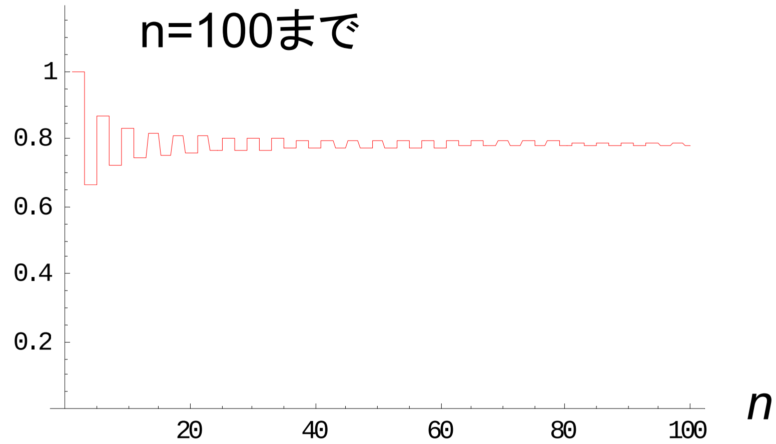
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = 0.723810 \quad \cdots$$

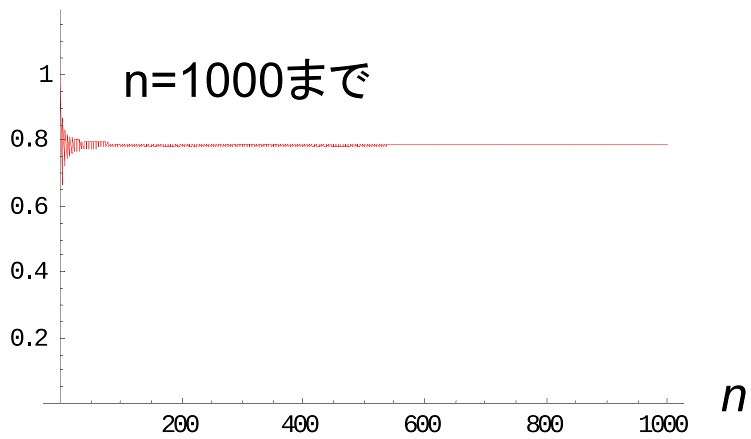
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = 0.834921 \quad \cdots$$

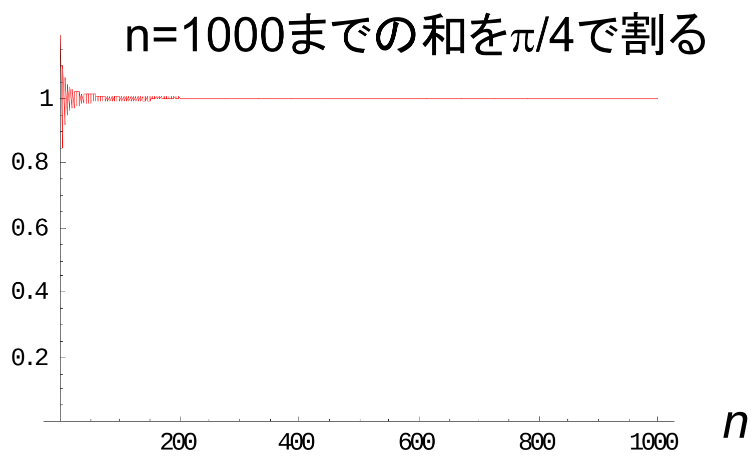
5. ライプニッツの級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$$









５. いろんな級数

ライプニッツ（1671）

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}=\frac{\pi}{4}$$

オイラー（1735、バーゼル問題）

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}=\zeta(2)$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

５. オイラーの級数

オイラー（1744）

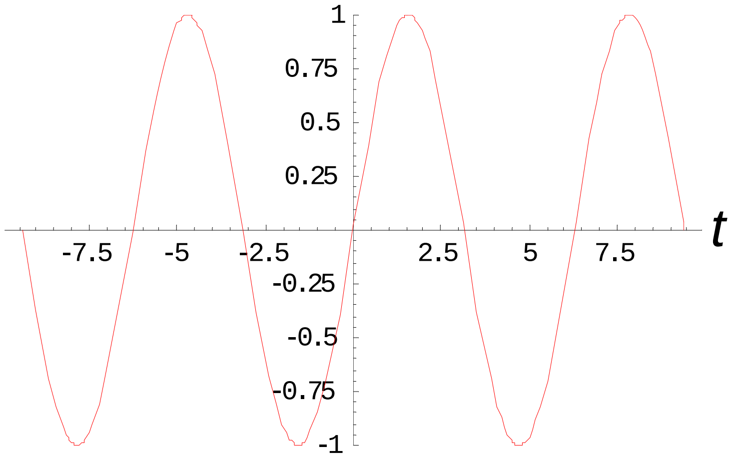
$$\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$= \frac{\pi - t}{2}$$

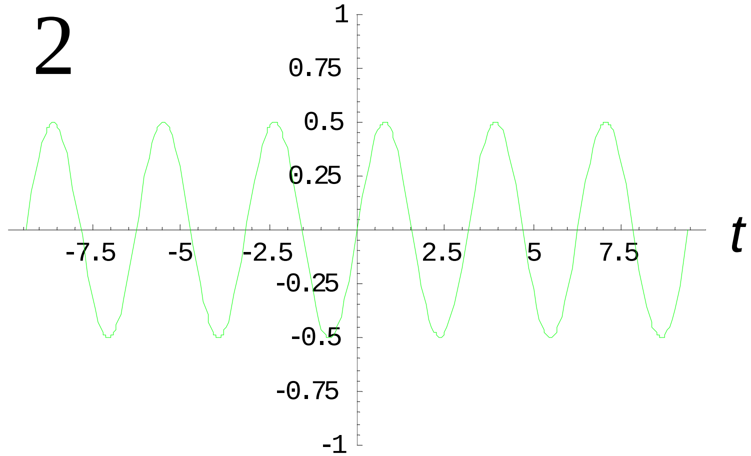
ただし $0 < t < 2\pi$

5. オイラーの級数

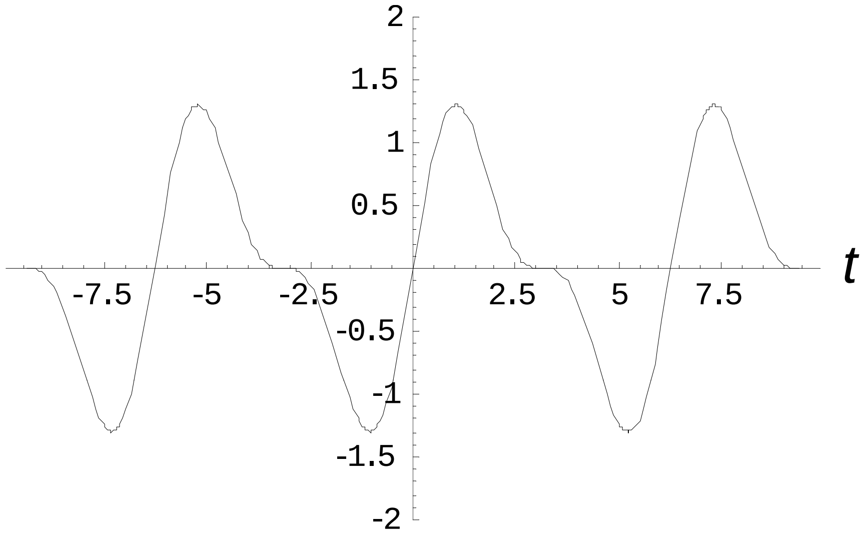
$\sin t$



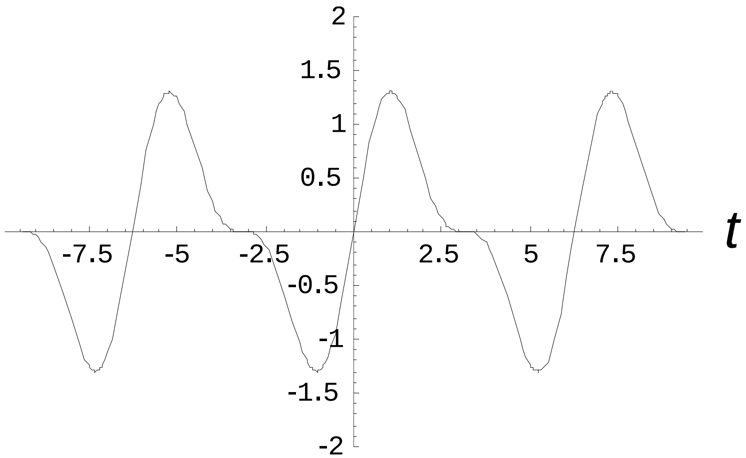
$$\frac{\sin 2t}{2}$$



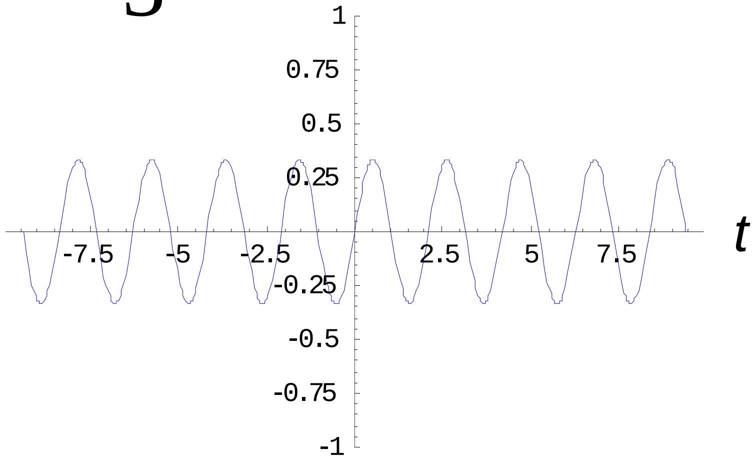
$$\sin t + \frac{\sin 2t}{2}$$



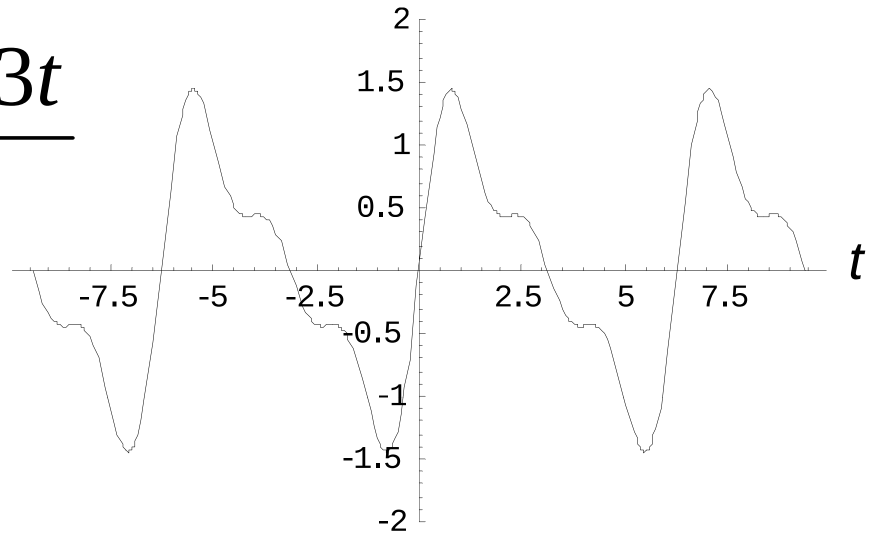
$$\sin t + \frac{\sin 2t}{2}$$

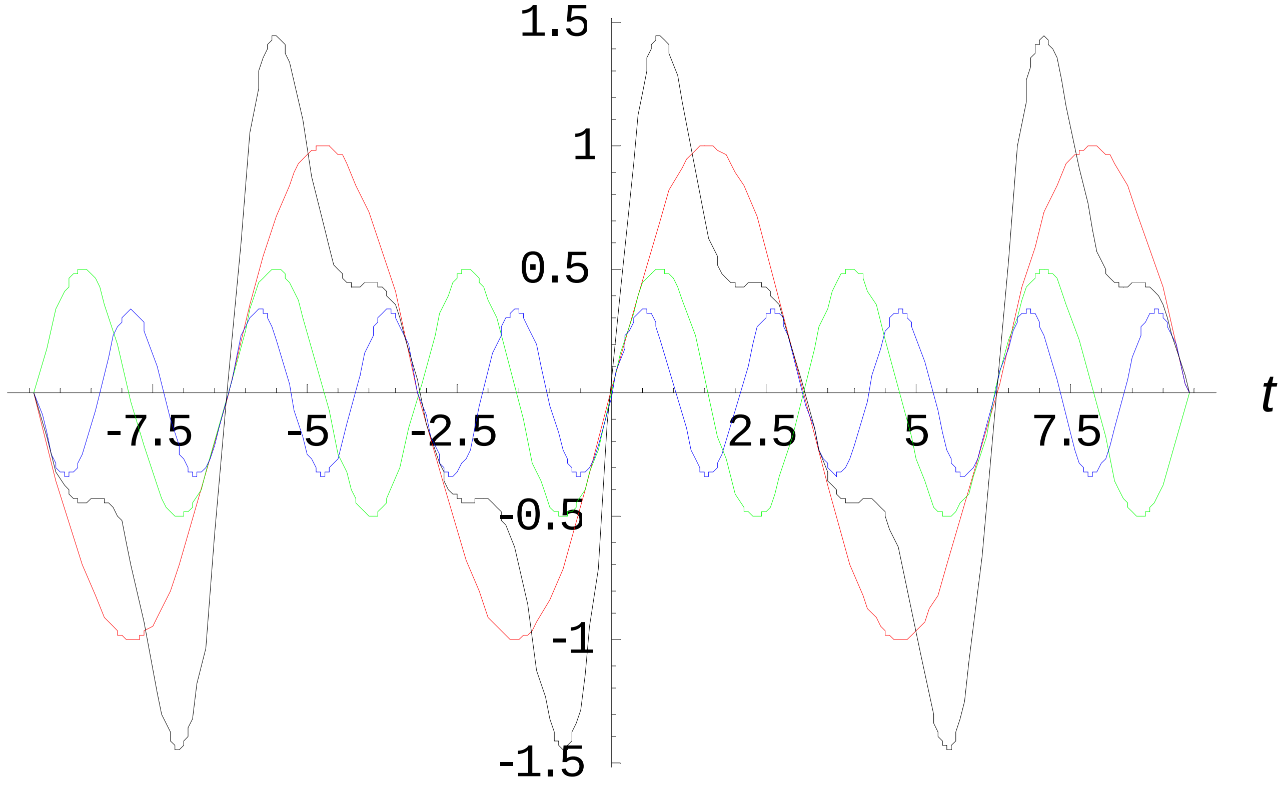


$$\frac{\sin 3t}{3}$$



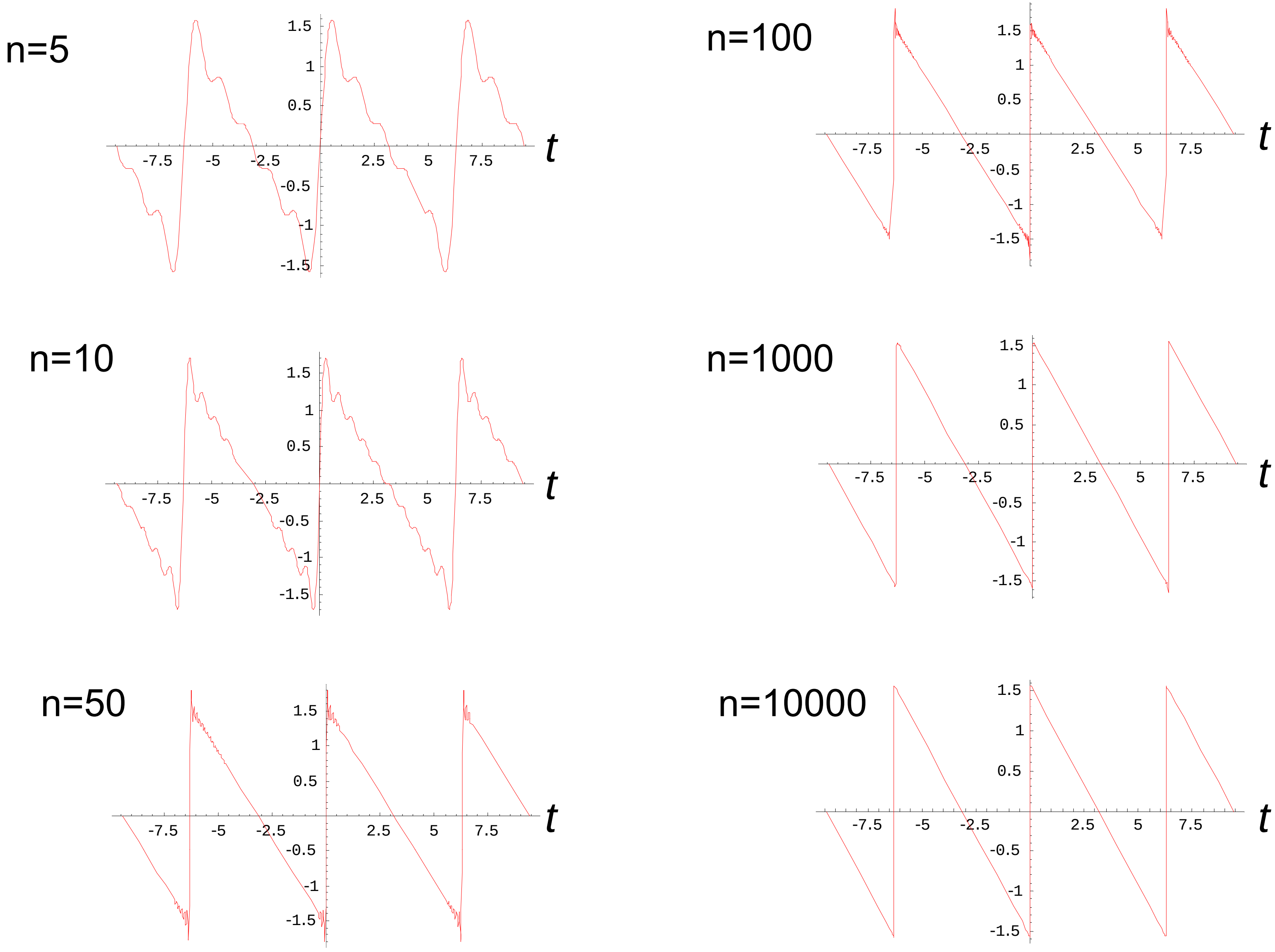
$$\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3}$$





1.5
1
0.5
-7.5
-5
-2.5
2.5
5
7.5
t
-0.5
-1
-1.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}$$



５．オイラーの級数の証明

$$S(t) = e^{it} + e^{i2t} + e^{i3t} + \cdots$$

$$e^{it}S(t) = e^{it}\left(e^{it} + e^{i2t} + e^{i3t} + \cdots\right)$$
$$= e^{i2t} + e^{i3t} + e^{i4t} + \cdots$$

よって

$$S(t) - e^{it}S(t) = S(t)\left(1 - e^{it}\right) = e^{it}$$

$$S(t) = \frac{e^{it}}{1 - e^{it}}$$

$$S(t)=\frac{e^{it}}{1-e^{it}}=\frac{e^{it}(1-e^{-it})}{(1-e^{it})(1-e^{-it})}=\frac{e^{it}-e^{0}}{1-e^{it}-e^{-it}+e^{0}}$$

$$=\frac{e^{it}-1}{1-e^{it}-e^{-it}+1}=\frac{e^{it}-1}{2-(e^{it}+e^{-it})}$$

オイラーの
公式

$$=\frac{\cos t+i\sin t-1}{2-2\cos t}=\frac{\cos t-1+i\sin t}{2(1-\cos t)}$$

$$=\frac{-(1-\cos t)+i\sin t}{2(1-\cos t)}=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right) \quad \text{—①}$$

ところで

$$S(t)=e^{it}+e^{i2t}+e^{i3t}+\cdots$$
$$=\left(\cos t+\cos 2t+\cos 3t+\cdots\right)+i\left(\sin t+\sin 2t+\sin 3t+\cdots\right)$$

よって①より

$$\cos t+\cos 2t+\cos 3t+\cdots=-\frac{1}{2}$$

項別に不定積分し

三角関数の積分

$$\sin t+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}+\cdots=-\frac{1}{2}t+C$$ C:積分定数

t=π/2を代入し

$$\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}+\cdots=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+C$$

ライプニッツの級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+C \Leftrightarrow C=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

以上より

$$\boxed{\sin t+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}+\cdots=-\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi-t}{2}}$$

オイラーの級数(1744)は

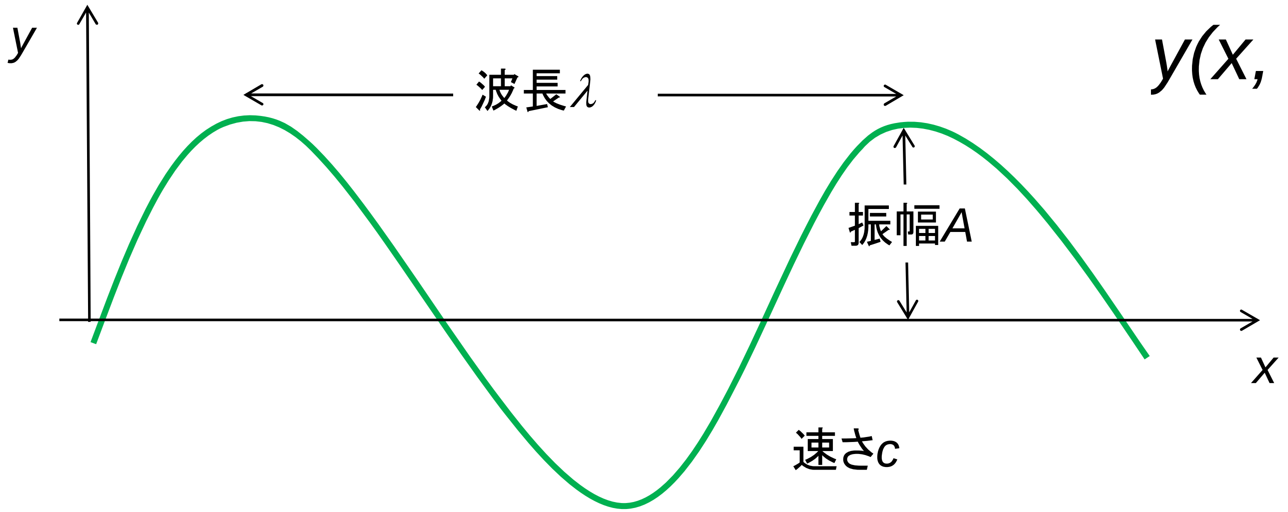
フーリエ級数(1807)の原型

フーリエ級数:
周期関数を三角関数の和で表す

フーリエ変換:
フーリエ級数を非周期関数に拡張

６．量子力学で出てくる複素数

弦を伝わる横波



$y(x, t)$

振動数$\nu = c/\lambda$

波動方程式
（弦の微小部分の運動方程式）

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

弦を伝わる横波の波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

その解

$$y(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)$$

波長λ、
振動数ν=c/λの正弦波

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2\pi}{\lambda} A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = 2\pi\nu A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2\pi}{\lambda} A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) = \frac{-4\pi^2}{\lambda^2} A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2\pi\nu \cdot 2\pi\nu A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) = -4\pi^2\nu^2 A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)$$

量子力学では、電子は粒子であると同時に波である

電子の波:電子ビーム、を考えてみる

電子が空間を波として伝わる様子を表す
波動関数

$$\varphi(x,t) = A\cos\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)$$

を用いて、波動方程式がかけるはず

波動関数は、全ページの解に以下を代入して求まる

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p},\ \ \nu = \frac{E}{h} = \frac{E}{2\pi\hbar},\ \ E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -A\frac{p}{\hbar}\sin\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = A\frac{E}{\hbar}\sin\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -A\frac{p^2}{\hbar^2}\cos\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -A\frac{E^2}{\hbar^2}\cos\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)$$

しかし、実際は書けない

運動のパラメータであるEやpが残ってしまう

よって、波動関数を複素数としてみる

$$\varphi(x,t) = A\left[\cos\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right) + i\sin\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right)\right]$$

$$= Ae^{i\frac{px-Et}{\hbar}} = Ae^{i\frac{px}{\hbar}}e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}Ae^{i\frac{px}{\hbar}}e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}Ae^{i\frac{px}{\hbar}}e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m}Ae^{i\frac{px}{\hbar}}e^{-i\frac{Et}{\hbar}} = EAe^{i\frac{px}{\hbar}}e^{-i\frac{Et}{\hbar}} = i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$$

1次元の自由粒子のシュレディンガー方程式

参考文献

本講義資料：　物質WEB＞量子物性＞冨田＞講義情報
http://mswebs.naist.jp/LABs/optics/tomita/jpn/lec_j.htm

物理数学全般について
数学　-物理を学び楽しむために-　田崎晴明　暫定版
（学習院大物理学科WEBよりPDF入手可能）
第１章だけでも良いので読んでみることをお勧めする。

複素数
理工系の複素関数論　殿塚勲、河村哲也 （東大出版会）

量子力学
岩波基礎物理シリーズ　量子力学　原康夫 （岩波）
量子力学（上）　シッフ （吉岡書店）