

2009年4月10日(金) 1時限目

平成21年度 物質科学解析 第7回
フーリエ解析

富田知志

0. はじめに
1. 物質科学におけるフーリエ解析
2. 級数展開とは
3. フーリエ級数を求めてみる
4. フーリエ変換してみる

※中央前方の席がたぶんよく見えます

0. はじめに: この授業のスタンスと約束と目標

スタンス:

数学は道具、もしくは言葉

自分に対して使う、他人に対して使う、本質を見抜くために使う

数学的な厳密性を多少犠牲にしても、

フーリエ解析の直観的な理解を目指す

私の問題、現実的な問題

約束:

1. 数式を怖がらない

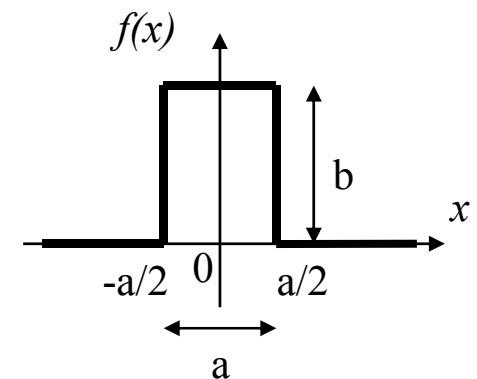
出てくるのはせいぜい三角関数、指数関数、 Σ 、 \int 程度

これまで習った知識のみを使う

2. 自分の手を動かすことを厭わない

目標:

矩形波のフーリエ変換ができるようになる



波

とは？

波とは？

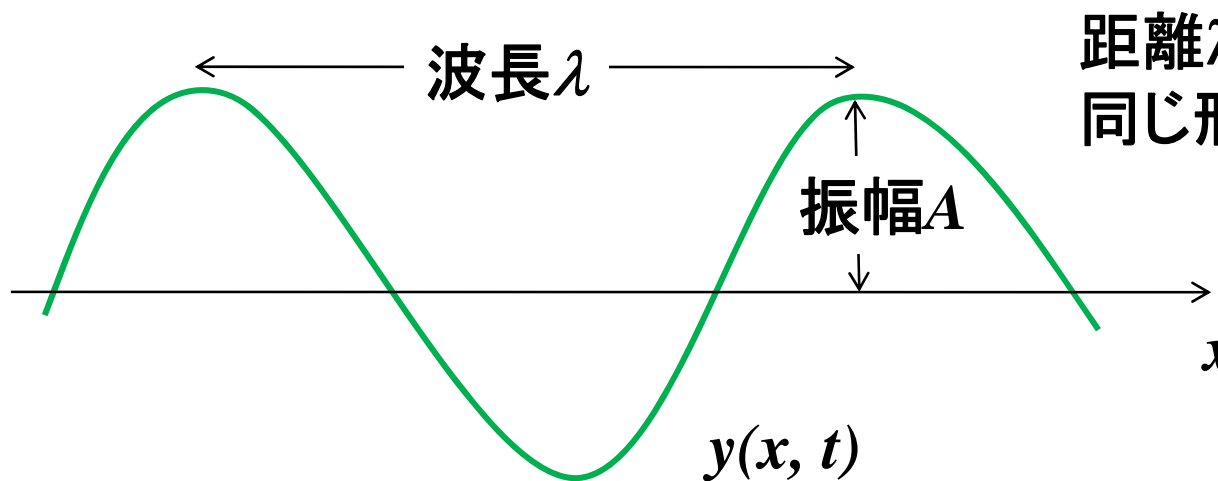
空間的にも時間的にも変動するような場の運動

岩波理化学辞典

例：音波、電磁波（光波）、水の波、弾性波、物質波（ドブロイ波）

x 軸の正方向に速さ c で伝わる一次元正弦波

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$



距離 λ もしくは時間 T ごとに
同じ形の運動が繰り返される

波数 $k = 2\pi/\lambda$

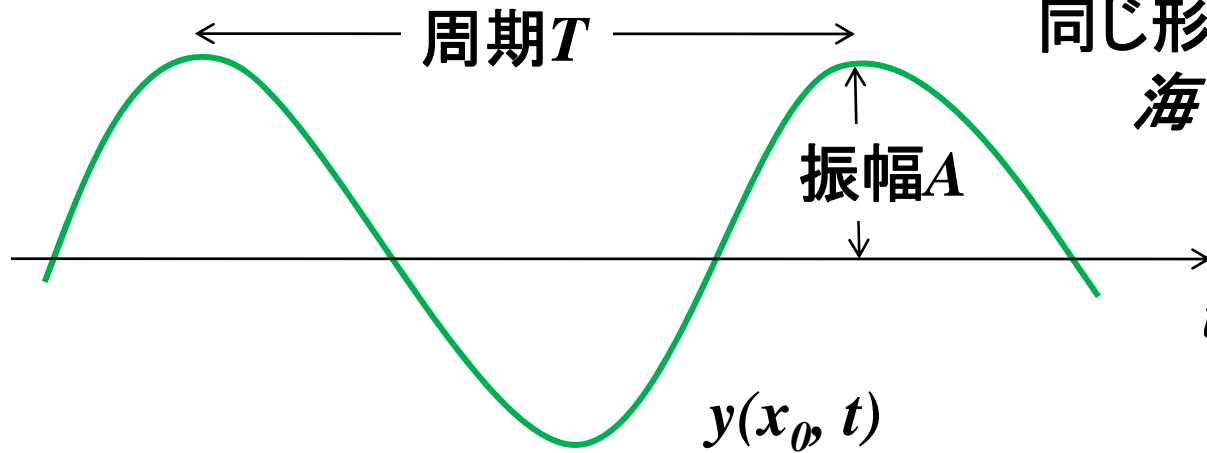
角周波数 $\omega = 2\pi/T$

周波数 $\nu = 1/T$

位相速度 $c = \omega/k$

位置 x_0 で固定した場合

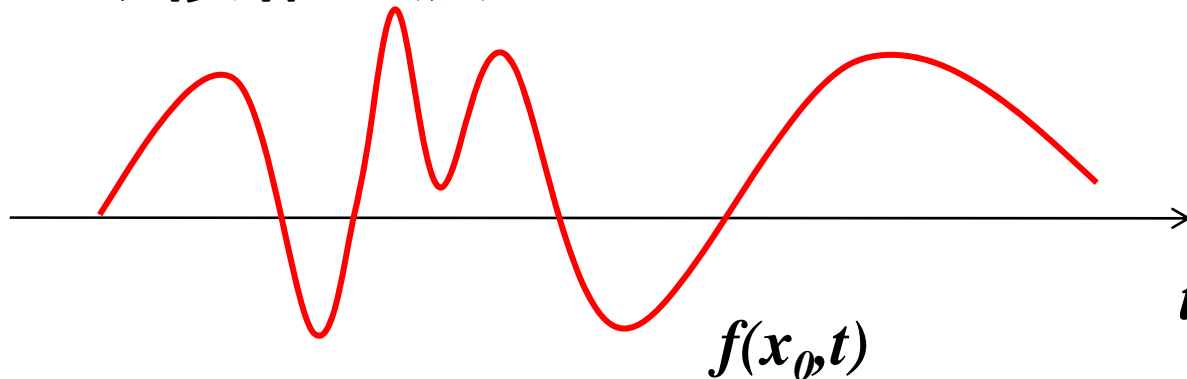
$$y = A \sin(kx_0 - \omega t)$$



位置 x_0 では、時間 T ごとに
同じ形の運動が繰り返される
海で波に揺られる

繰り返しの指標
角周波数 $\omega = 2\pi/T$
周波数 $\nu = 1/T$

より複雑な波

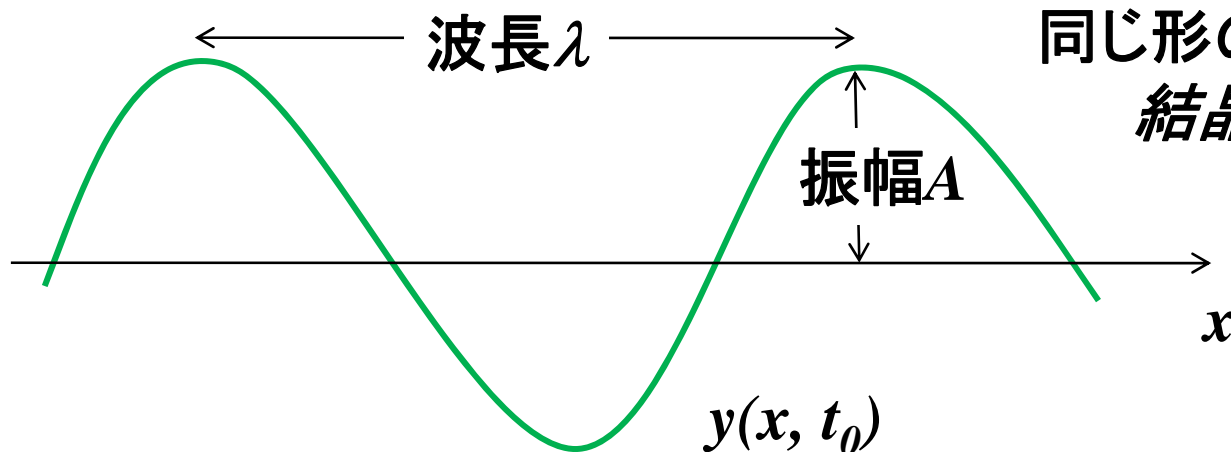


$f(x_0, t)$ は既知として

角周波数 ω ???

時間 t_0 で固定した場合:

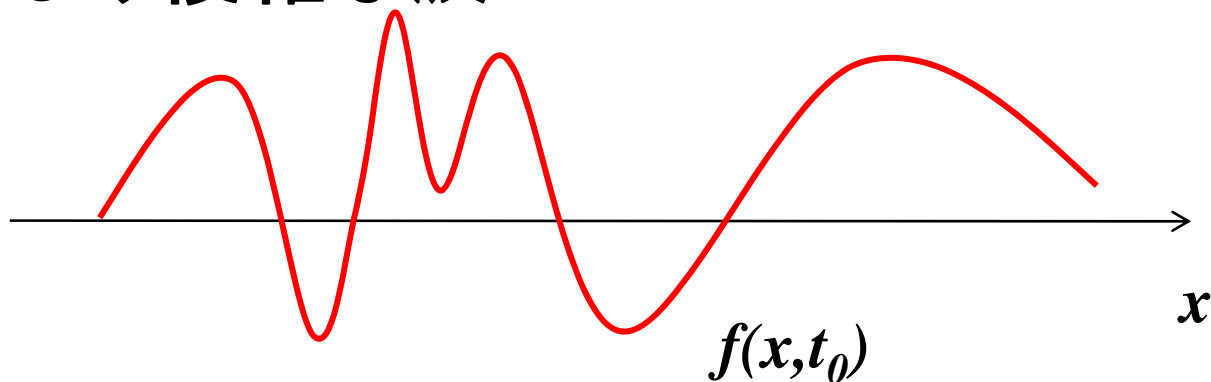
$$y = A \sin(kx - \omega t_0)$$



時間 t_0 では、位置 λ ごとに
同じ形の運動が繰り返される
結晶中での原子の配置

繰り返しの指標
波数 $k = 2\pi/\lambda$

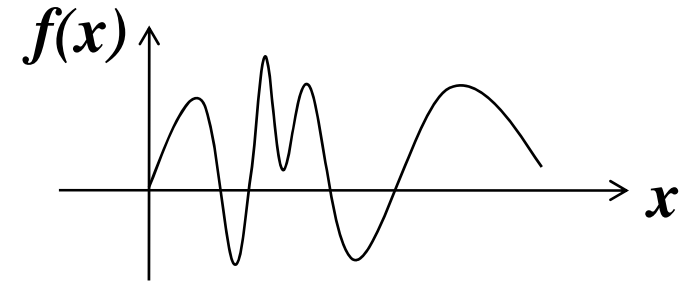
より複雑な波



$f(x, t_0)$ は既知として

波数 k ???

1. フーリエ解析とは何か？



1. 1 フーリエ解析

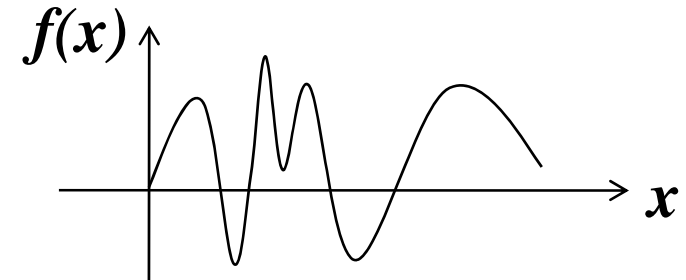
関数の時間領域での性質が**周波数**領域でどう表現されるか、
関数の実空間での性質が**波数**(逆)空間でどう表現されるか、
振動現象に隠れている周期性、

つまり**どのような波がどう繰り返しているか**を

フーリエ級数やフーリエ変換を用いて、明らかにする

波が関係する物理学、化学、工学の分野で幅広く活用

1. フーリエ解析とは何か？



1. 1 フーリエ解析

関数の時間領域での性質が周波数領域でどう表現されるか、
関数の実空間での性質が波数(逆)空間でどう表現されるか、
振動現象に隠れている周期性、

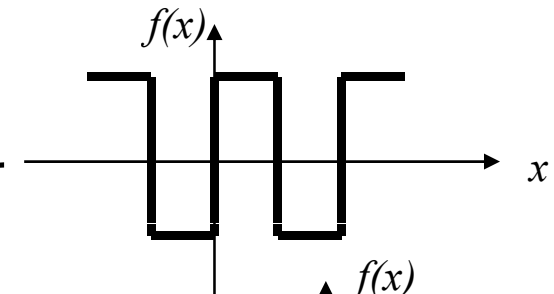
つまりどのような波がどう繰り返しているかを

フーリエ級数やフーリエ変換を用いて、明らかにする

波が関係する物理学、化学、工学の分野で幅広く活用

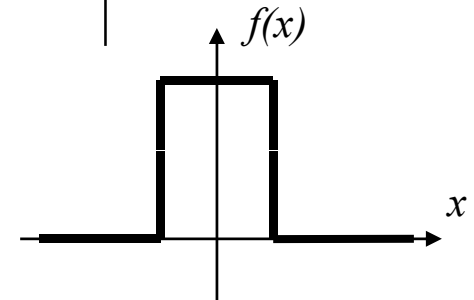
フーリエ級数:

周期関数を三角関数の級数として表す



フーリエ変換(フーリエ積分)

周期関数でない、より一般的な関数への
フーリエ級数の拡張



1. 3 フーリエ解析が使われる例：
波が出てくるところフーリエ解析あり

熱伝導、偏微分方程式

光学： フラウンホーファー回折、結像原理 波は光

結晶構造の解析： 結晶構造因子、X線回折、TEM 波は光もしくは電子

フーリエ分光法： *FT-IR*, *FT-NMR* 波は光

変調と検波： *AM*ラジオ、信号波、搬送波 波は電磁波(光)

線形応答理論： 複素誘電率、クラマース・クローニツヒ関係式 波は光

高速フーリエ変換(FFT)： サンプリング、信号処理 波は電気信号

光ナノサイエンスにはフーリエ解析に関係する事例がたくさん出てくる

1.4 波の特徴の例: 光の回折現象

回折: 光や音、つまり波が障害物をかすめたとき、幾何学的に直進しないで、影の部分に回りこむ現象。

池の石の影に回りこむ水面の波

ホイヘンスーフレネルの原理

※回折と散乱:

マックスウェル方程式の境界値問題を解くという意味では同じ

波長より小さな物体、全方向へ影響: 散乱

波長より大きな物体、背後の限定空間: 回折

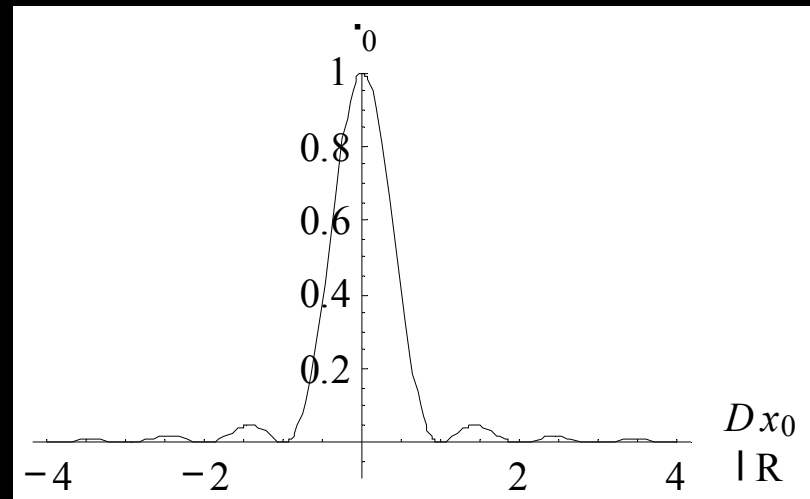
遠い領域: フラウンホーファー回折

近い領域: フレネル回折

細
125 μm

スリット幅
太
500 μm

単スリット



単スリットによる回折

狭

スリット間隔
広

二重スリット

ヤングの二重スリットの実験

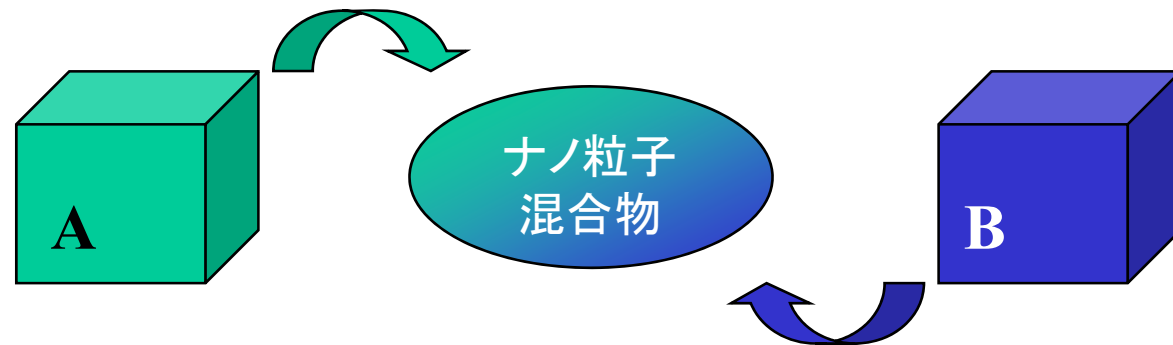
1. 5 物質科学で出てくる回折現象の一例

質問

物質Aと物質Bがあるとする。

物質Aと物質Bの正体をあなたは知らない。

あなたは今、物質Aのナノ粒子と物質Bのナノ粒子の混合物を手にしてたたく。



そこであなたは、物質AとBが一体何かをモータースに知りたい。
更に、それぞれのナノ粒子の形状・サイズを知りたい。

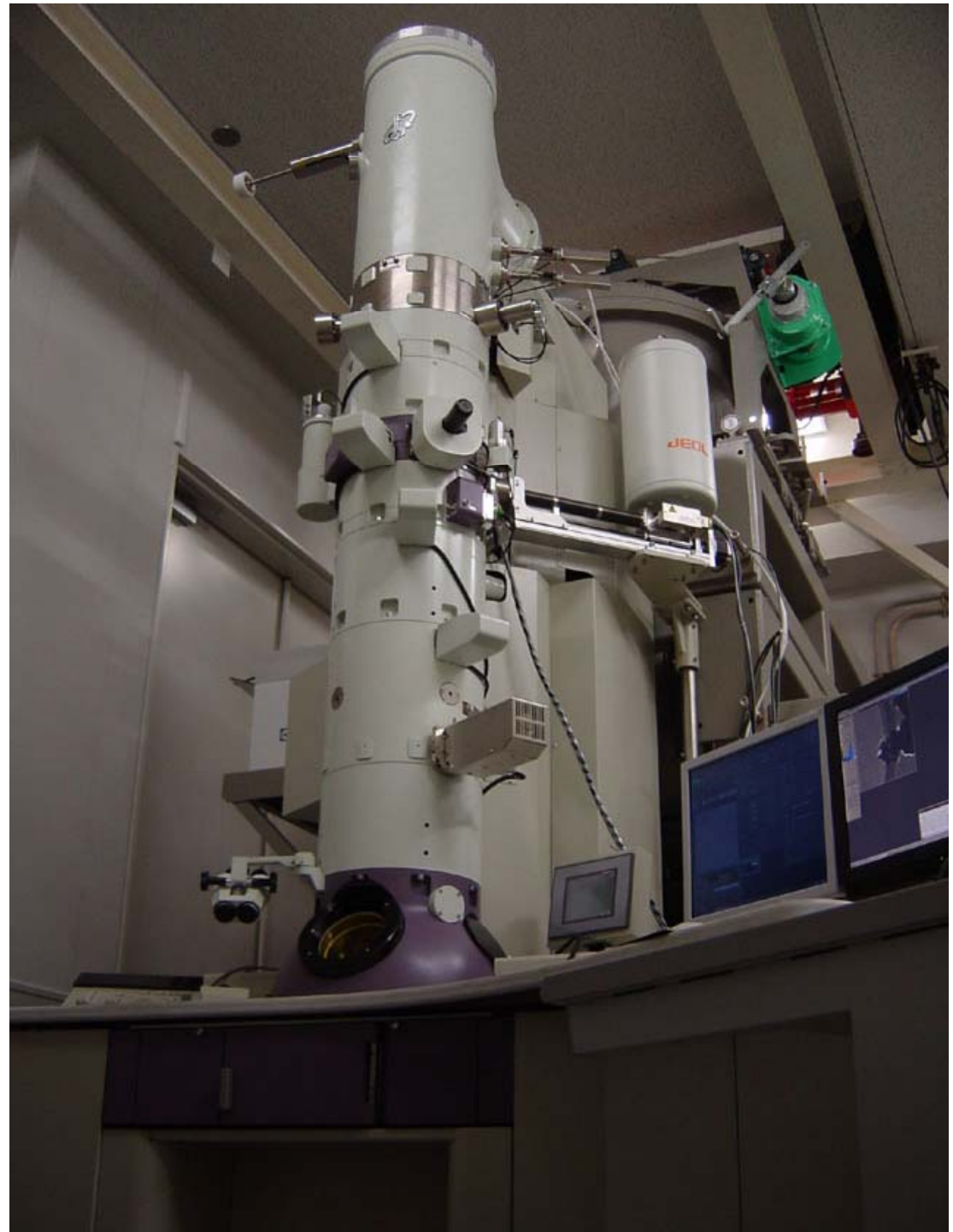
そのような場合、あなたならどうしますか？

1.5 物質科学での回折

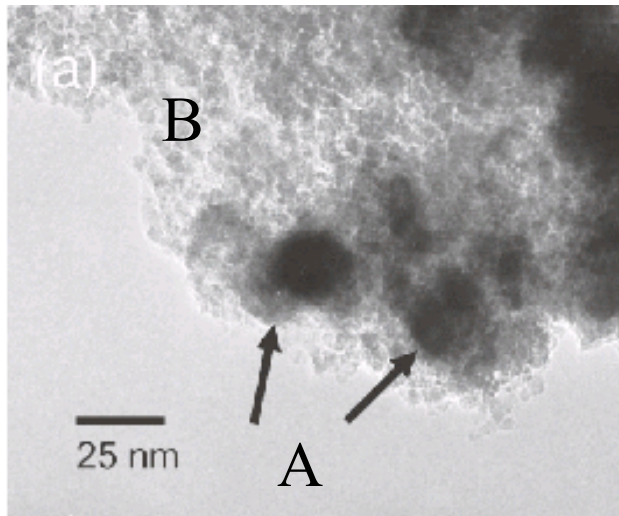
透過型電子顕微鏡
(Transmission electron
microscope: TEM)

当研究科保有@F115
JEM-3100FEF
(日本電子)

極微細な構造の
形状、結晶構造を調
べる

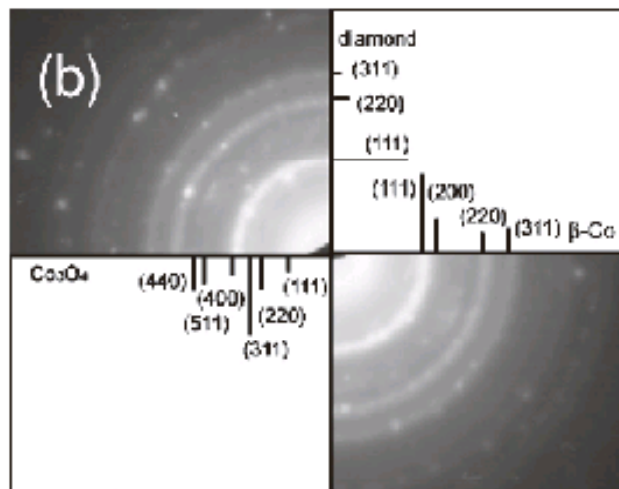


透過型電子顕微鏡での電子線回折



A = コバルトナノ粒子
B = ダイヤモンドナノ粒子

明視野像: 形状・サイズを見る



電子線回折像:
結晶構造を“見る”

周期的結晶構造に起因する回折線
逆格子像

スポットやリングの位置: ブラッグの式
回折強度: フーリエ変換

FIG. 1. A TEM image (a) and a SAED pattern (b) of the initial mixture of Co and diamond nanoparticles. Co nanoparticles about 30 nm in diameter (indicated by arrows) are surrounded by diamond nanoparticles about 5 nm in diameter.

Tomita et al., JAP 2000.

波動の回折現象 ～X線回折～

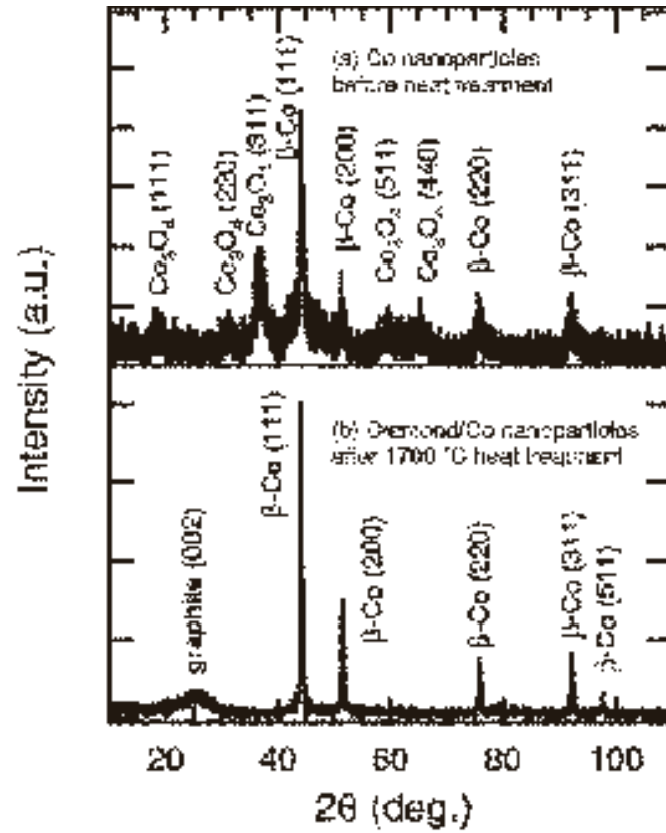


FIG. 2. XRD profiles of initial Co nanoparticles before heat treatment (a) and the mixture of Co and diamond nanoparticles after the heat treatment at 1700 °C (b).

Tomita et al., JAP 2000.

波動の回折現象2 ～フラウンホーファー回折～

量子力学の世界では、電子(線)も波とみなせる

原子による結晶格子を複数のスリットとみなすと、
電子線は回折する

透過型電顕の電子線回折像はフラウンホーファー回折
回折線の強度はフーリエ変換で求まる

強い回折線の現れる方向は、ブラッグ(反射)条件で決まる
格子面による反射波の干渉としても説明可能

1章のまとめ

1.1 フーリエ解析

関数の時間領域での性質が周波数領域でどう表現されるか、
関数の実空間での性質が波数(逆)空間でどう表現されるか、
振動現象に隠れている周期性、

つまりどのような波がどう繰り返しているかを

フーリエ級数やフーリエ変換を用いて、明らかにする

波が関係する物理学、化学、工学の分野で幅広く活用

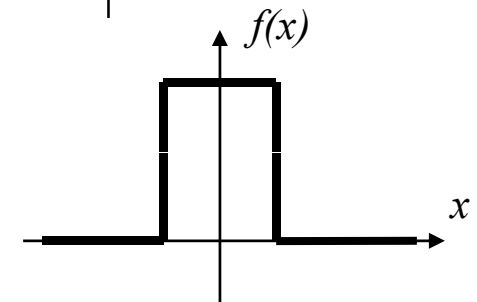
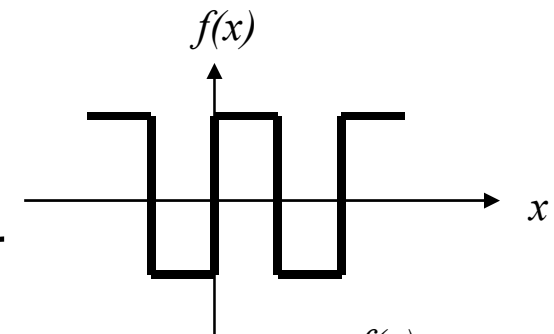
以降の内容

フーリエ級数:

周期関数を三角関数の級数として表す

フーリエ変換(フーリエ積分)

周期関数でない、より一般的な関数への
フーリエ級数の拡張



2. 級数展開とは

2.1 級数展開とは その1

以下の連立方程式を解いてみる

$$\begin{cases} a + b + c = 8 \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$\begin{cases} a - b + c = 4 \end{cases} \quad (2.1b)$$

$$\begin{cases} a - b - c = 2 \end{cases} \quad (2.1c)$$

2. 級数展開とは

2.1 級数展開とは その1

以下の連立方程式を解いてみる

$$\begin{cases} a + b + c = 8 & (2.1a) \\ a - b + c = 4 & (2.1b) \\ a - b - c = 2 & (2.1c) \end{cases}$$

$$(2.1c) \text{より} \quad a = b + c + 2$$

$$(2.1b) \text{に代入し} \quad c = 1$$

$$(2.1a) \text{に代入し} \quad b = 2$$

以上より、 $a=5, b=2, c=1$

2.2 級数展開とは その2

以下の連立方程式を解いてみる

$$\begin{cases} a+b+c=8 & (2.1a) \\ a-b+c=4 & (2.1b) \\ a-b-c=2 & (2.1c) \end{cases}$$

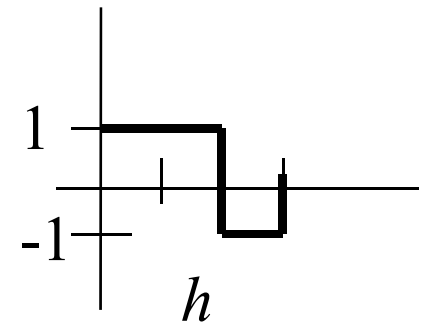
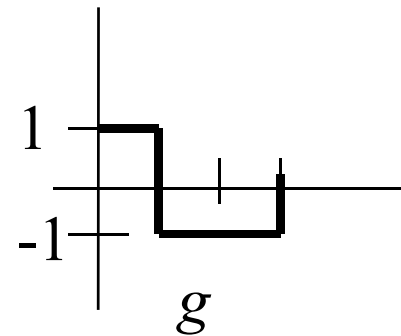
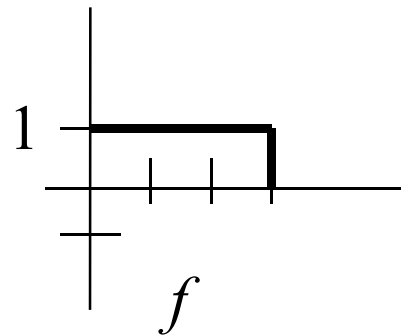
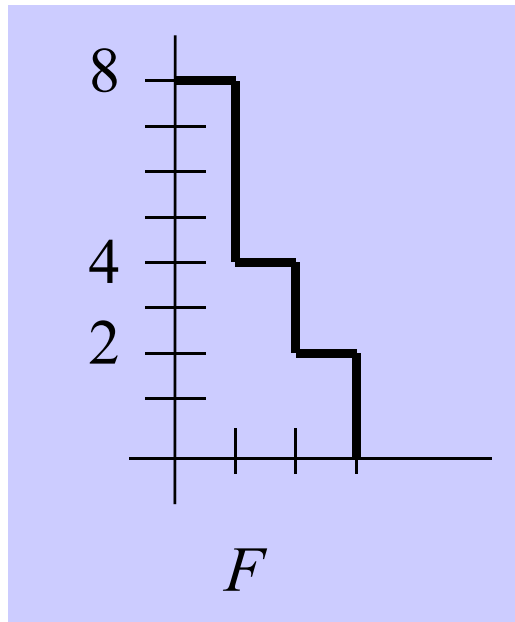
少し視点を変えて、
方程式を次のように書き替える $a \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

そして $f \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $g \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $h \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $F \equiv \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

と定義すると、連立方程式(2.1)は、 $af+bg+ch=F$ と書ける。

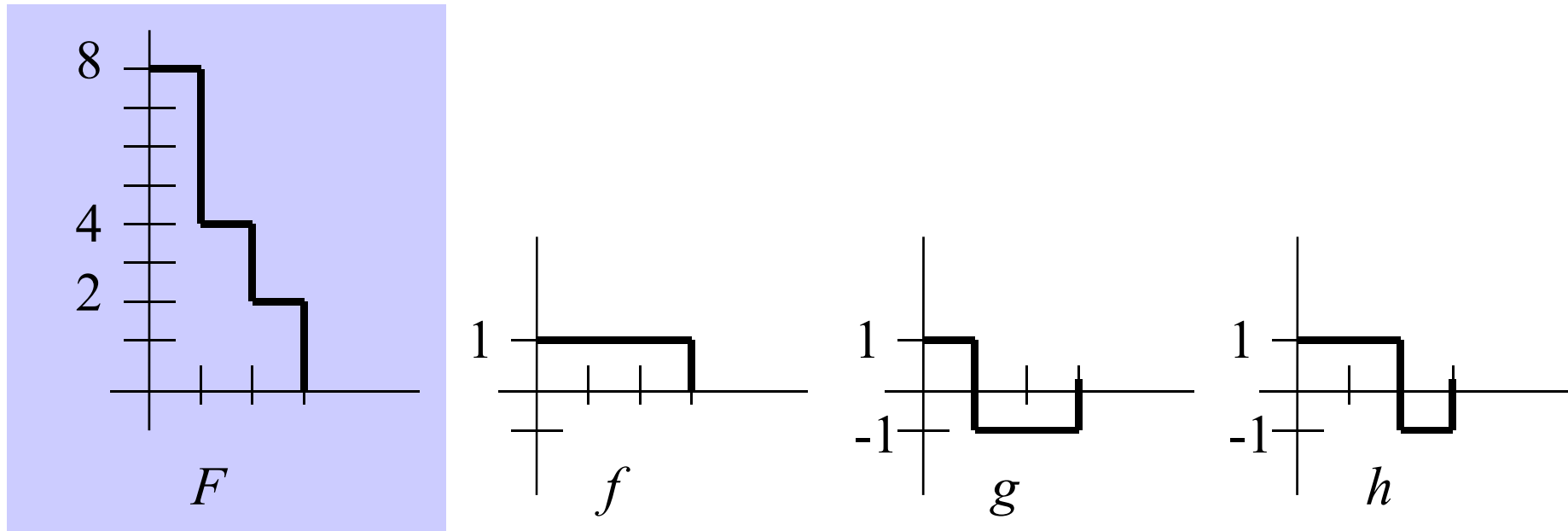
これは f 、 g 、 h 、 F をそれぞれ一種のデジタルな関数と考えてやれば、 a 、 b 、 c という係数を用いることで、

F という関数が f 、 g 、 h という三つの関数で展開された
と考えることができる。



これは f 、 g 、 h 、 F をそれぞれ一種のデジタルな関数と考えてやれば、 a 、 b 、 c という係数を用いることで、

F という関数が f 、 g 、 h という三つの関数で展開されたと考えることができる。



そして展開した時の係数 a 、 b 、 c が、連立方程式の解に対応する。

この F をどのように換えても、連立方程式の解は求まるので、

任意の「関数」 F は、それに対応する係数 a 、 b 、 c を用いて

f 、 g 、 h により展開可能 級数展開の直観的イメージ

2.3 級数展開とは その3

以下の連立方程式に対して

$$\begin{cases} a+b+c=8 & (2.1a) \\ a-b+c=4 & (2.1b) \\ a-b-c=2 & (2.1c) \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad g \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad h \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad F \equiv \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

と定義し、連立方程式(2.1)を $af+bg+ch=F$ と書いたうえで、 F と f 、 g 、 h を既知のものとして、 a 、 b 、 c を求めることができないか？

2.3 級数展開とは その3

以下の連立方程式に対して

$$\begin{cases} a+b+c=8 & (2.1a) \\ a-b+c=4 & (2.1b) \\ a-b-c=2 & (2.1c) \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad g \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad h \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad F \equiv \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

と定義し、連立方程式(2.1)を $af+bg+ch=F$ と書いたうえで、
 F と f 、 g 、 h を既知のものとして、 a 、 b 、 c を求めることができないか？
残念ながらこのままではできない。

なんで??

f 、 g 、 h の性質が悪い

2. 級数展開とは

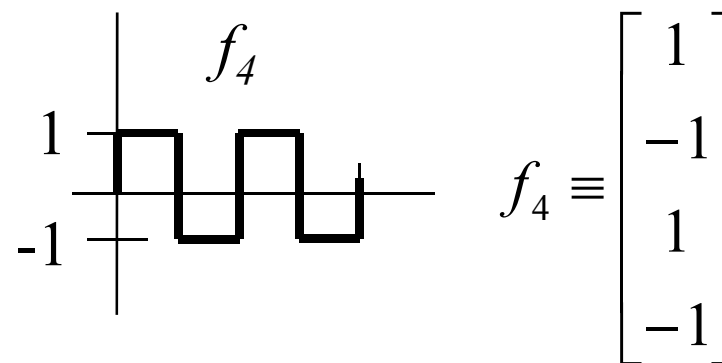
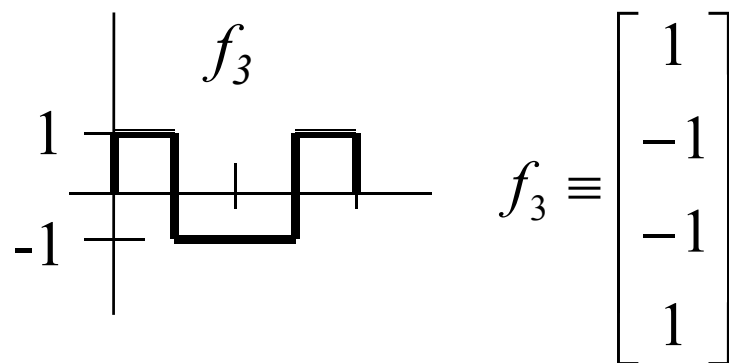
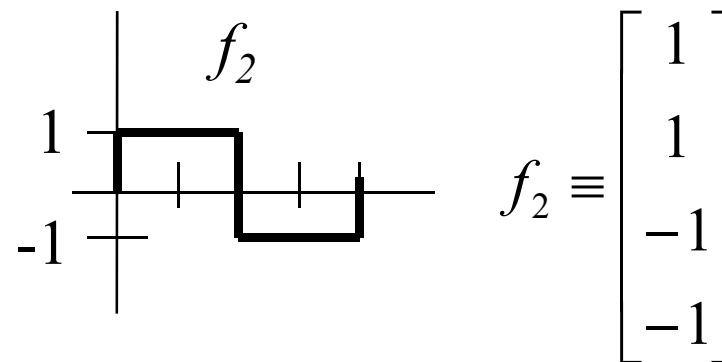
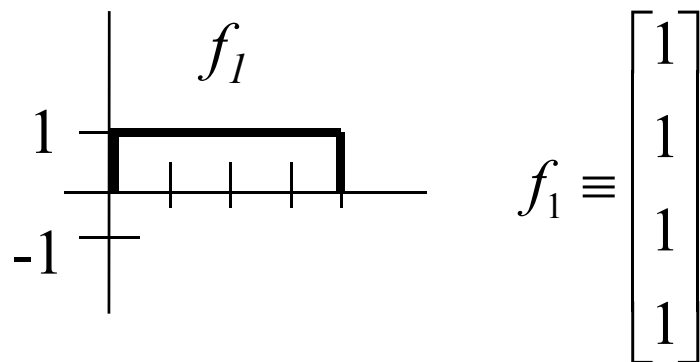
以下の連立方程式を解くことを考える。

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11 & (2.2a) \\ a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = -1 & (2.2b) \\ a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = -5 & (2.2c) \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 3 & (2.2d) \end{cases}$$

$$f_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f_3 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f_4 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

とすると、連立方程式は $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = F$ と書ける

なお、 $f_n(n=1,2,3,4)$ は、それぞれ以下のようなかたち。



それぞれの関数のグラフが**左右対称な形**となっている(矩形関数)

この連立方程式は F が何であっても、解くことができる。

つまり任意のデジタル関数 F が、
 $F = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4$ というように、
矩形関数 $f_n (n=1,2,3,4)$ により展開されたと考えることができる

四個の矩形関数を用いたので、 F で表現される数値は4つ

矩形関数 f_n は $\int f_j(x) f_i(x) dx = 0$ ($i \neq j$ の場合)
自分自身と
掛けたときだけ
生き残る
という関係を満たす(直交関係)。
大変良い性質。

この連立方程式は F が何であっても、解くことができる。

つまり任意のデジタル関数 F が、

$F = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4$ というように、

矩形関数 $f_n (n=1,2,3,4)$ によって展開可能となる。

四個の矩形関数を用いたので、 F で表現される数値は4つ

矩形関数 f_n は $\int f_j(x) f_i(x) dx = 0$ ($i \neq j$ の場合) 自分自身と掛けたときだけ生き残る
という関係を満たす(直交関係)。大変良い性質。

このような関係が満たされた場合は、連立方程式が解ける。

例えば、 a_2 を求めたい場合、 F に f_2 をかけて、積分すればよい。

$$F = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4$$

$$\Rightarrow f_2 F = a_1 f_2 f_1 + a_2 f_2 f_2 + a_3 f_2 f_3 + a_4 f_2 f_4 = 0 + a_2 f_2^2 + 0 + 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{f_2 F}{|f_2|^2}$$

例：今回の連立方程式の場合、

$$f_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f_3 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f_4 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

実は a_n は、

$$a_1=2, a_2=3, a_3=5, a_4=1$$

という組み合わせである。

いまはこれら a_n を未知として、 F と $f_1 \sim f_4$ から求めてみる。

例えば a_2 の場合、 F に f_2 かけて、つまりベクトルとして内積を取って

$$f_2 \cdot F =$$

$$f_2 \cdot f_2 = |f_2|^2 =$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f_2 F}{|f_2|^2} =$$

※ベクトル的にあつかう

※余力があれば他の a_1, a_3, a_4

例：今回の連立方程式の場合、

$$f_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f_3 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f_4 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

実は a_n は、

$$a_1=2, a_2=3, a_3=5, a_4=1$$

という組み合わせである。

いまはこれら a_n を未知として、 F と $f_1 \sim f_4$ から求めてみる。

例えば a_2 の場合、 F に f_2 かけて、つまりベクトルとして内積を取って

$$f_2 \cdot F = 1 \times 11 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-5) + (-1) \times 3 = 11 - 1 + 5 - 3 = 12$$

$$f_2 \cdot f_2 = |f_2|^2 = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1) = 4$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f_2 F}{|f_2|^2} = \frac{12}{4} = 3$$

ときちんと $a_2=3$ が出てきた。

矩形関数をどんどん細かくすれば、

すなわち振動数の大きな矩形関数を考えれば、

F で表現できる数値 a の個数はどんどん大きくなる。

最終的には F は、アナログ関数に限りなく近づかず

矩形関数の代わりに三角関数を用いても、
似たような話は成立する

むしろ、三角関数の方が、より性質が良い

これがまさに級数展開(フーリエ級数)

の考え方

直交関係が重要な役割

3. フーリエ級数を求めてみる

3. 1 周期関数:

関数 $f(x)$ が、全ての x に対して

$$f(x + T) = f(x) \quad (3.1)$$

となるような正の定数 T を持つ場合、
この関数を周期的であるという

$f(x)$ を周期関数
 T を周期

周期関数のグラフは、長さ T の任意の区間のグラフの繰り返し

例: 三角関数

3. 2 フーリエ級数

既知の関数 $f(x)$ は周期 $2L$ を持つとする

目的: 周期 $2L$ をもつ関数の集まり

$$1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots$$

を使って、 $f(x)$ を表してみる。

例: $f(x)$ が 2π の周期を持つ($L=\pi$)として、

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

を使って $f(x)$ を表す

結論を言ってしまうと、任意の周期関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.2) \end{aligned}$$

と表せる(展開できる)。
これが**フーリエ級数**。

結論を言ってしまうと、任意の周期関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.2) \end{aligned}$$

と表せる(展開できる)。
これがフーリエ級数。

そして、既知の $f(x)$ から未知の係数 a_n と b_n を求めればよい。
そうすれば、 $f(x)$ を級数展開できる。

三角関数 $\sin(n\pi x/L)$, $\cos(n\pi x/L)$ とそれらの積、それぞれの $-L$ から L までの積分を確認しておく。

(i) m が正の整数、または0ならば

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 2L & (m=0) \\ 0 & (m=1,2,3,\dots) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (3.4)$$

(ii) m, n が正の整数ならば

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \quad (3.5)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} L & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} L & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (3.7)$$

つまり三角関数の積分は直交関係を持つ。

まず a_n を求めるために

$$(3.2) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

の両辺に $\cos(m\pi x/L)$ ($m=0,1,2,\dots$) をかけて、
 x について、 $-L$ から L まで積分する

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$m=0$ の時、(3.8) の右辺は第一項だけ残り、その値 $a_0 L$

$m=1,2,\dots$ の時、右辺第一項は(3.3)より0、 $\{\}$ の内は、
(3.5)、(3.6)より最初の積分が $n=m$ の時だけ残り、後は0

以上、まとめると

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

よって

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

次に b_n を求めるために、同様に

$$(3.2) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

の両辺に今度は $\sin(m\pi x/L)$ ($m=0,1,2,\dots$)をかけて、 x について、 $-L$ から L まで積分する

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right\} \quad (3.10) \end{aligned}$$

右辺の第一項は(3.4)より任意の m に対して0、
{}の内は、(3.5)、(3.7)より2番目の積分が $m=n$ の時だけが0でない

以上、まとめると b_m については

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L \quad (m = 1, 2, \dots)$$

よって

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

※以上の計算では、(3.2)の右辺の級数が $f(x)$ に一様に収束するとして、和と積分の順序を入れ替えた。

$$(3.9) \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(3.11) \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された a_n, b_n をフーリエ係数(もしくはスペクトル)と呼び、これらの係数を代入して得られる級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.12)$$

を $f(x)$ に対するフーリエ級数と呼ぶ。

$$(3.9) \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(3.11) \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された a_n, b_n をフーリエ係数(もしくはスペクトル)と呼び、これらの係数を代入して得られる級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.12)$$

を $f(x)$ に対するフーリエ級数と呼ぶ。

$f(x)$ に対するフーリエ級数が収束し、その和が $f(x)$ であるならば、その級数を $f(x)$ のフーリエ級数といい、以下のように書く

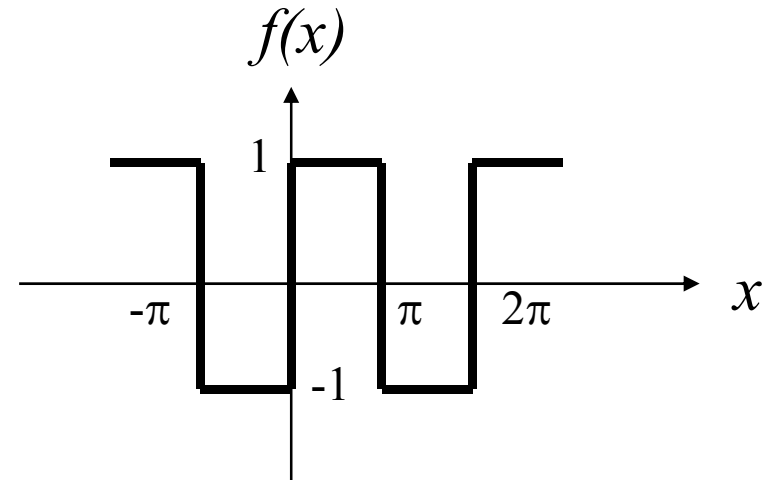
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.13)$$

例題1

以下の式に示す周期 2π の関数をフーリエ級数で表せ

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



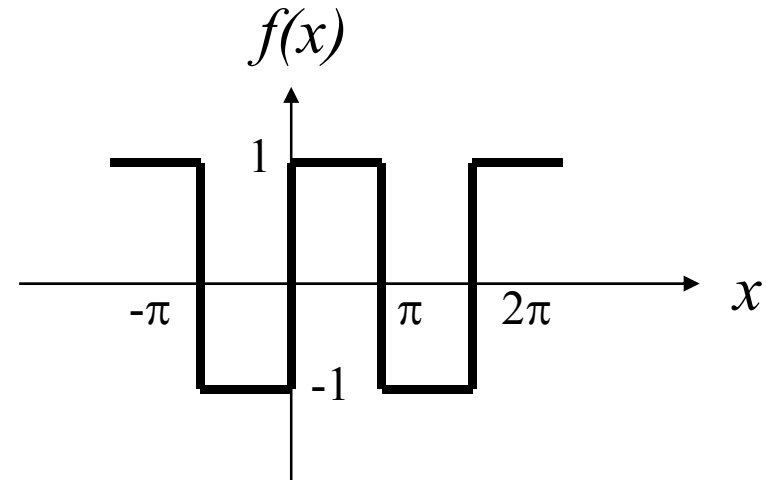
公式集[4.18]

例題1

以下の式に示す周期 2π の関数をフーリエ級数で表せ

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



周期 $2L=2\pi$ 、すなわち $L=\pi$ として、公式(3.9)、(3.11)を用いる

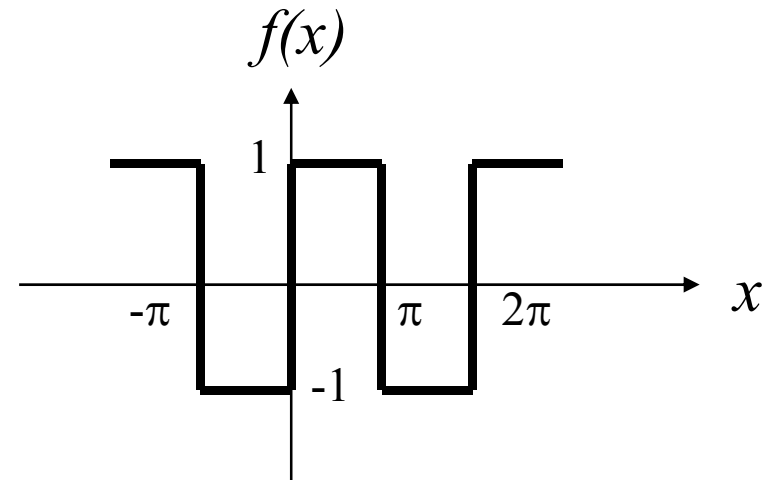
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} (1) dx \right] = \frac{1}{\pi} [(-1)\pi + \pi] = 0$$

例題1

以下の式に示す周期 2π の関数をフーリエ級数で表せ

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cos nx dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

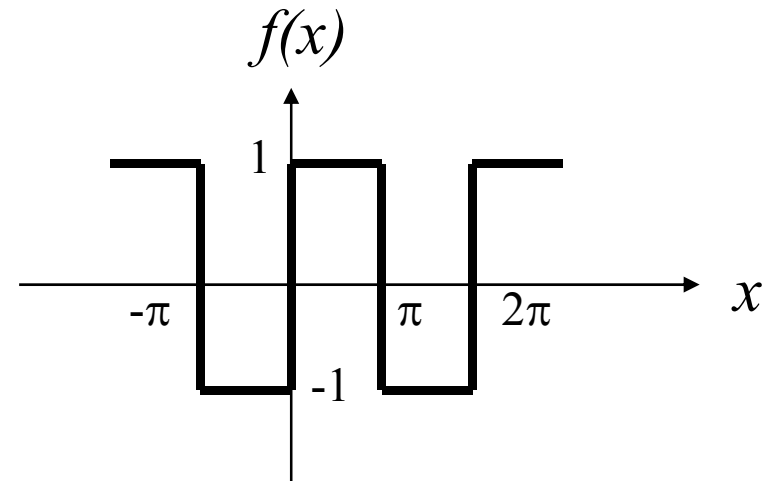
※積分の授業を思い出そう、公式集[3.10]

例題1

以下の式に示す周期 2π の関数をフーリエ級数で表せ

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin nx dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

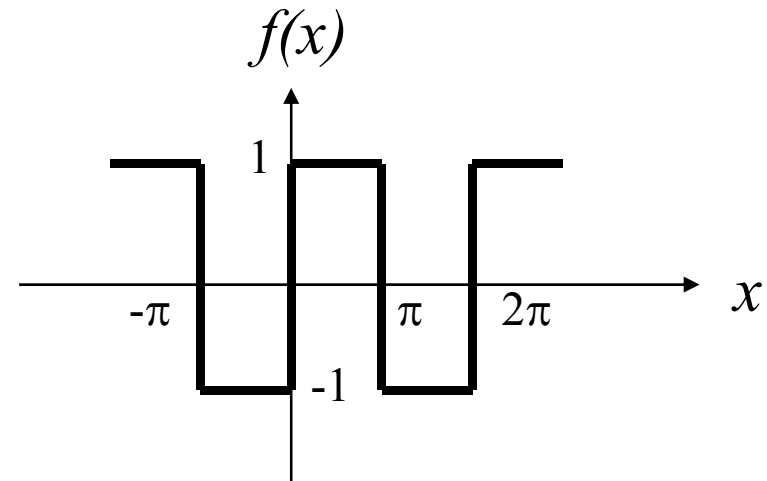
※積分の授業を思い出そう
公式集[3.11]

例題1

以下の式に示す周期 2π の関数をフーリエ級数で表せ

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

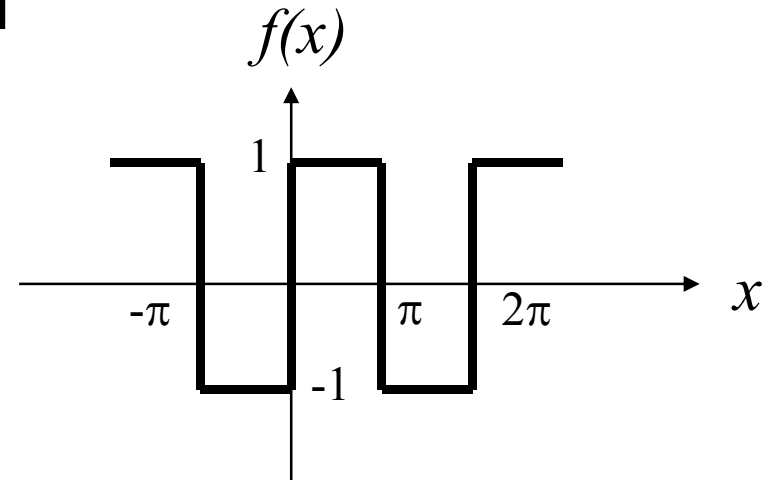


従って $f(x)$ のフーリエ級数は(3.12)より、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin nx \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right) \end{aligned}$$

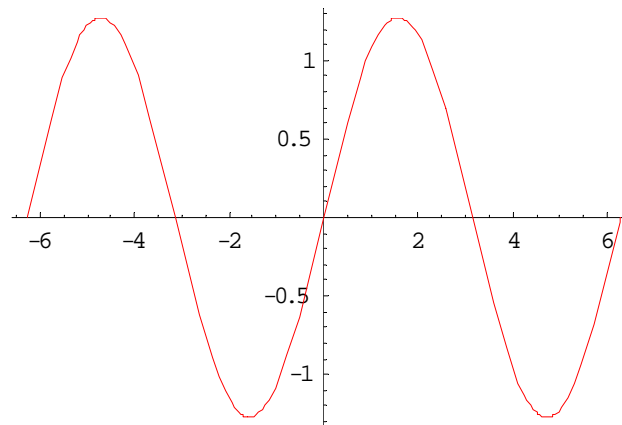
例題1

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



Mathematica* での計算例

$n=1$

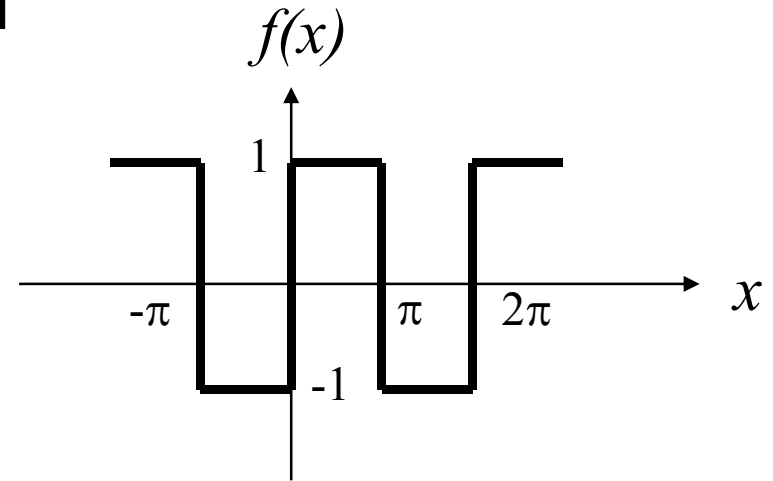


$$f(x) = \frac{4}{\pi} (\sin x)$$

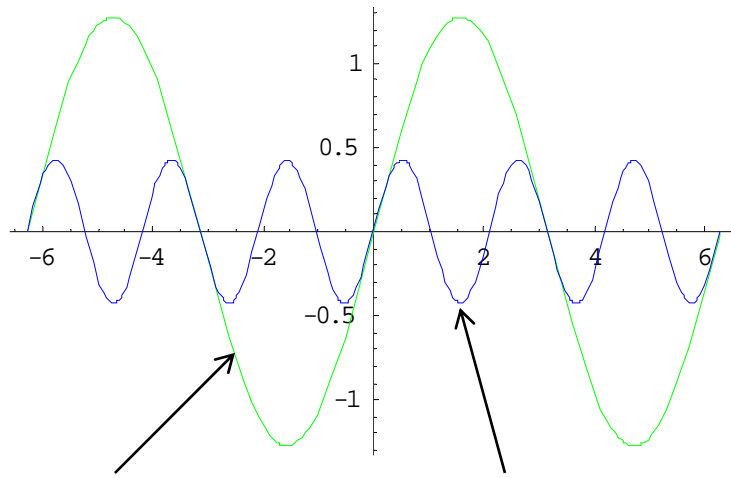
*研究室のITCマシンに、今はほとんど入っている数値計算ソフト

例題1

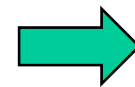
$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



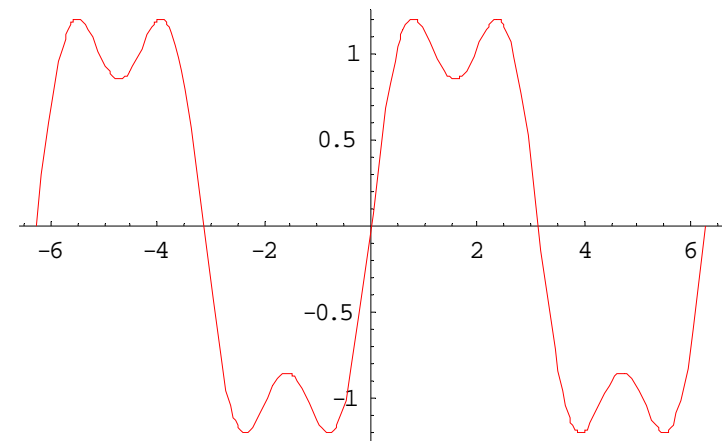
Mathematicaでの計算例



$$f(x) = \frac{4}{\pi} (\sin x) \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right)$$



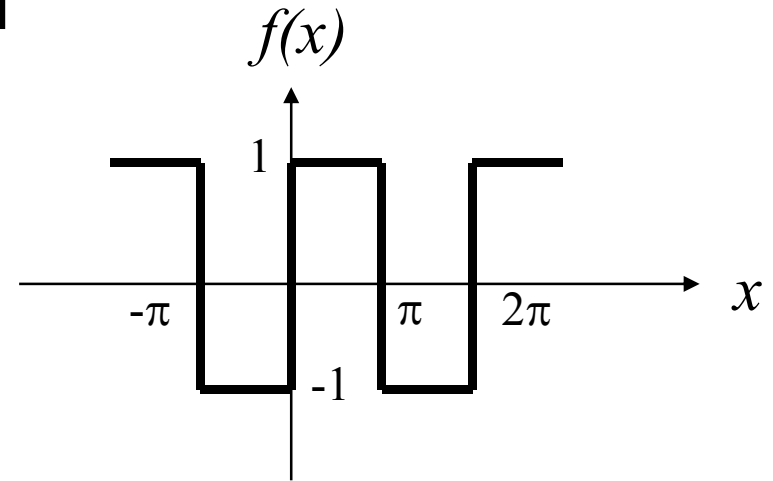
n=3



$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$

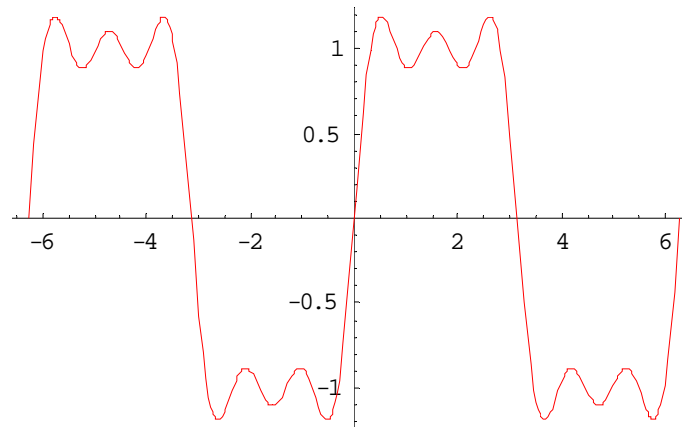
例題 1

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



Mathematica での計算例

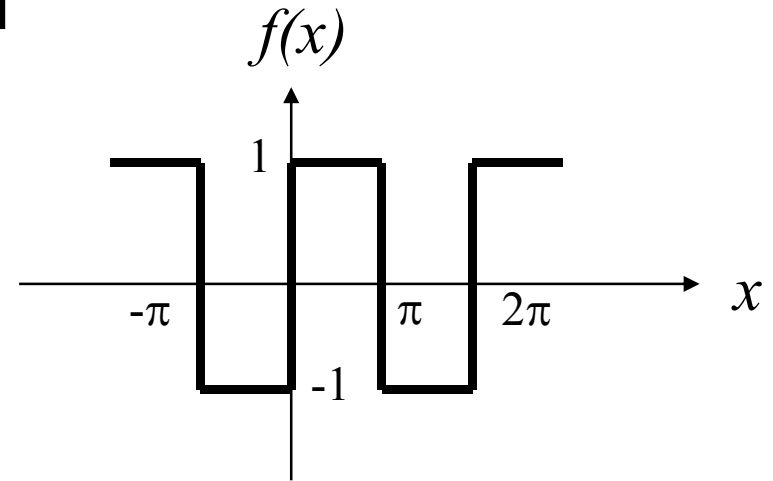
$n=5$



$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \right)$$

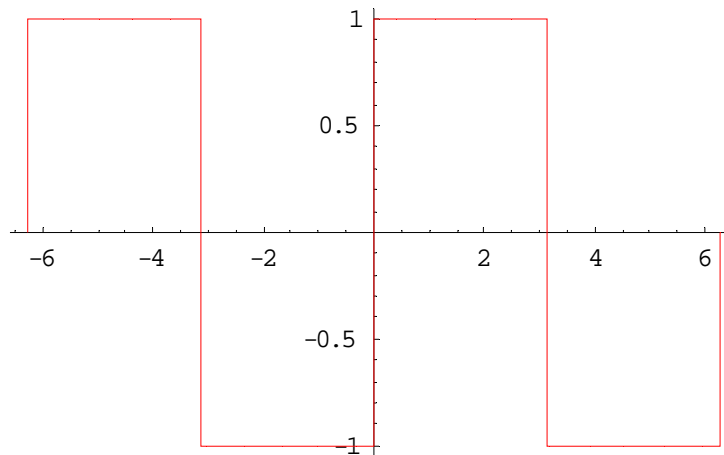
例題1

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



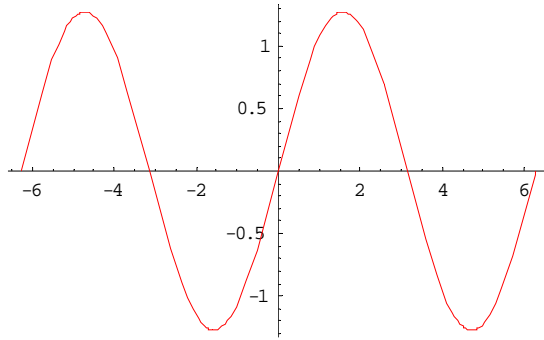
Mathematicaでの計算例

n=10000

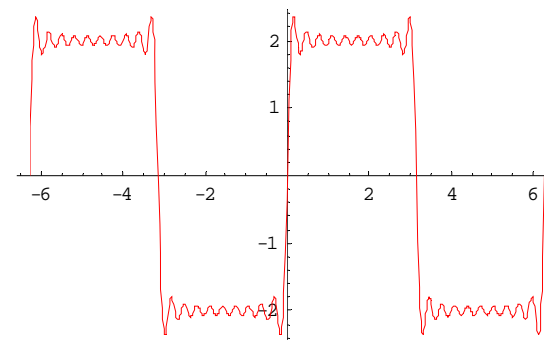


$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots + \frac{1}{9999} \sin 9999x \right)$$

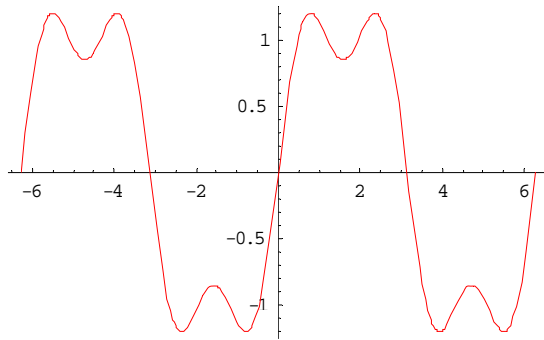
n=1



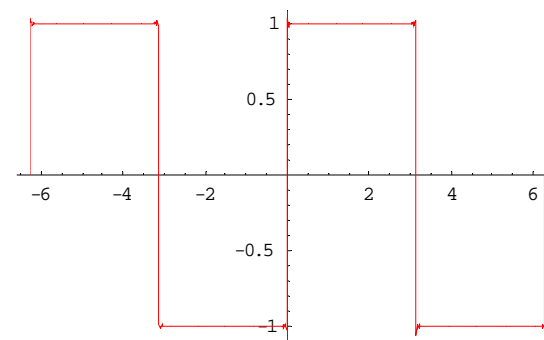
n=20



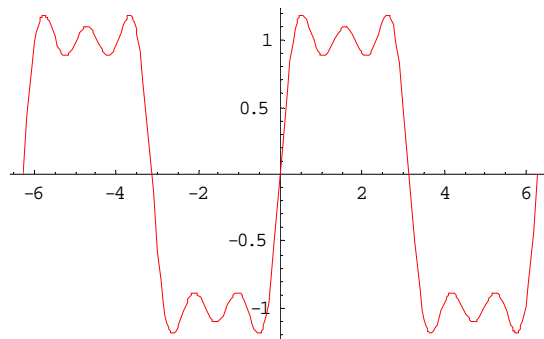
n=3



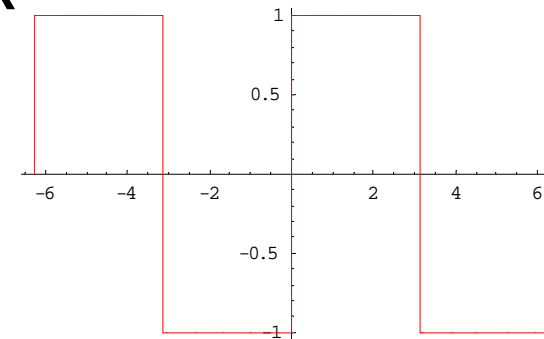
n=1k



n=5



n=10k



3. 3 フーリエ正弦級数とフーリエ余弦級数

偶関数と奇関数

$f(-x)=f(x)$ ならば、 $f(x)$ は偶関数 : 例 $\cos ax$

$f(-x)=-f(x)$ ならば、 $f(x)$ は奇関数 : 例 $\sin ax$

周期 $2L$ を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、 \cos の項だけが残りに、
フーリエ余弦級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{3.14}$$
$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

周期 $2L$ を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、 \sin の項だけが残りに、
フーリエ正弦級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{3.15}$$
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

休憩：フーリエって誰？

1768年生まれ フランスの数学者、物理学者

エコール・ポリテクニークで解析数学の教鞭

ナポレオンのエジプト遠征に同行

1802年 イゼル県地方長官(グルノーブル)

1807年 熱伝導論の論文を提出

三角関数の和を用いて熱伝導方程式の解を構成

ラプラス、ラグランジュらは却下

1812年 改訂稿がパリ科学院の大賞

ただし厳密性に欠けるため非出版

しかし数理的な科学の流れを変える大きな発見

定積分の書き表し方を初めて $\int_a^b f(x)dx$

晩年は政治家、外交官



Jean Baptiste Joseph Fourier,
Baron de
(1768-1830)

Wikipediaより転載

出典：岩波理化学辞典、Wikipedia

4. フーリエ積分、フーリエ変換を試してみる

4. 1 フーリエ積分とは

フーリエ級数:

周期 $2L$ を持つ関数 $f(x)$ を、三角関数の無限級数で表した
(展開した)

では、周期的でない関数(無限に続かない関数、例えば
光や音など)に対してはどうすれば?

4. フーリエ積分、フーリエ変換を試してみる

4.1 フーリエ積分とは

フーリエ級数:

周期 $2L$ を持つ関数 $f(x)$ を、三角関数の無限級数で表した(展開した)

では、周期的でない関数(無限に続かない関数、例えば光や音など)に対してはどうすれば?

「周期的でない」 \Rightarrow 周期 $2L \rightarrow \infty$

$L \rightarrow \infty$ のとき、フーリエ級数はフーリエ積分になる
フーリエ積分の複素表示で、フーリエ変換が表される

4. 2 フーリエ積分

周期 $2L$ を持つ周期関数 $f_L(x)$ が、フーリエ級数により表されている。即ち、(3.9)、(3.10)、(3.11)より

$$f_L(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.1)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(u) \cos \frac{n\pi u}{L} du \quad (4.2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(u) \sin \frac{n\pi u}{L} du$$

ただし、(4.2)では積分変数 u とした。

(4.2)を(4.1)に代入する。

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(u) du + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f_L(u) \cos \frac{n\pi u}{L} du + \sin \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f_L(u) \sin \frac{n\pi u}{L} du \right] \quad (4.3)$$

(4.2)を(4.1)に代入する。

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(u) du + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f_L(u) \cos \frac{n\pi u}{L} du + \sin \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f_L(u) \sin \frac{n\pi u}{L} du \right] \quad (4.3)$$

新しい記号

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L} \quad (4.4)$$

を導入。これらを使って、(4.3)は以下のようになる。

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \left[\cos \omega_n x \int_{-L}^L f_L(u) \cos \omega_n u du + \sin \omega_n x \int_{-L}^L f_L(u) \sin \omega_n u du \right] \quad (4.5)$$

ここで $L \rightarrow \infty$ の極限を考える。周期を $2L$ としたので、

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x)$$

は周期関数ではなくなる。非周期関数 $f(x)$ は絶対積分可能、すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

は存在する、と仮定する。(ただしこれは自明ではない。)

ここで $L \rightarrow \infty$ の極限を考える。周期を $2L$ としたので、

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x)$$

は周期関数ではなくなる。非周期関数 $f(x)$ は絶対積分可能、すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

は存在する、と仮定する。(ただしこれは自明ではない。)
(4.5)の右辺第一項は $L \rightarrow \infty$ では0である。残りの無限級数は、 $L \rightarrow \infty$ で

$$f_L(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \left[\cos \omega_n x \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega_n u du + \sin \omega_n x \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega_n u du \right] \quad (4.6)$$

となる。

さらに $L \rightarrow \infty$ では、
 ω_n は連続変数とみなせる、
 $\Delta\omega \rightarrow 0$ である
ことを考慮し、和を積分に変える。

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega F(\omega_n) \Rightarrow \int_0^{\infty} d\omega F(\omega) \quad (4.7)$$

(4.6)と(4.7)から、

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \cos \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega u du d\omega + \int_0^{\infty} \sin \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega u du d\omega \right]$$

さらに $L \rightarrow \infty$ では、
 ω_n は連続変数とみなせる、
 $\Delta\omega \rightarrow 0$ である
ことを考慮し、和を積分に変える。

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega F(\omega_n) \Rightarrow \int_0^{\infty} d\omega F(\omega) \quad (4.7)$$

(4.6)と(4.7)から、

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \cos \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega u du d\omega + \int_0^{\infty} \sin \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega u du d\omega \right]$$

すなわち、

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega u du \quad (4.8)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega u du$$

これを $f(x)$ のフーリエ積分表示と言う。

(4.8)は三角関数の加法定理より、

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \cos \omega(x-u) \quad (4.9)$$

と書ける。(4.9)をフーリエ積分公式という。

※以上のフーリエ積分(4.9)の導出法は形式的なものであり、数学的に厳密なものではない。厳密にはフーリエ積分(4.9)の収束性を調べ、(4.6)を経由する手続きが正当であることを示す必要がある。

4.3 フーリエ変換

フーリエ積分公式(4.9)は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \cos \omega(x-u) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \frac{1}{2} \left\{ e^{i\omega(x-u)} + e^{-i\omega(x-u)} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) e^{i\omega(x-u)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) e^{-i\omega u} e^{i\omega x} \quad (4.10) \end{aligned}$$

※ $\cos\theta=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2$ を使う
複素数の授業を思い出そう

と書き直せる。(4.10)はフーリエ積分公式の複素表示。

4.3 フーリエ変換

フーリエ積分公式(4.8)は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \cos \omega(x-u) && \text{※} \cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 \text{を使う} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \frac{1}{2} \{ e^{i\omega(x-u)} + e^{-i\omega(x-u)} \} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) e^{i\omega(x-u)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) e^{-i\omega u} e^{i\omega x} \quad (4.10) \end{aligned}$$

と書き直せる。(4.10)はフーリエ積分公式の複素表示。これより、

ならば

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \quad \text{フーリエ変換} \quad (4.11)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{フーリエ逆変換} \quad (4.12)$$

結論を言うと、例えば、電子波の平面波などを扱う場合、変数 u, x が変位 x であるので、振動数 ω に対応する波数 $k=2\pi/\lambda$ を用いて

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{フーリエ変換} \quad (4.13)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad \text{フーリエ逆変換} \quad (4.14)$$

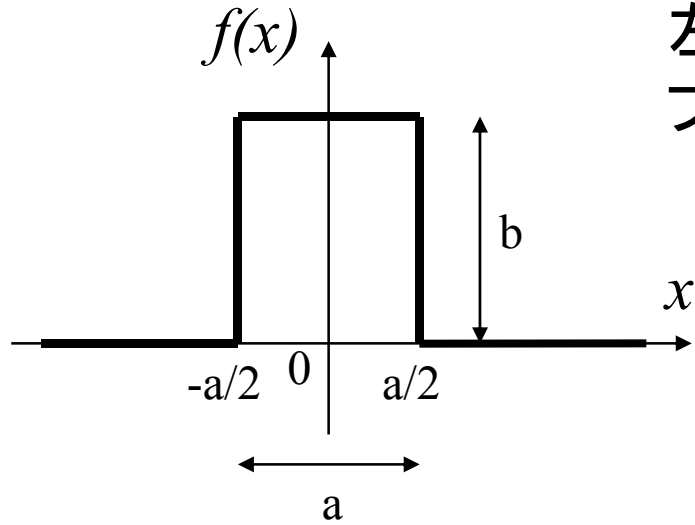
このとき

$F(k)$ は $f(x)$ のフーリエ変換、
 $f(x)$ は $F(k)$ のフーリエ逆変換という。

※孫引き注意。積分の前の係数は、その積が $1/2\pi$ であるように分ければよい。

例題2

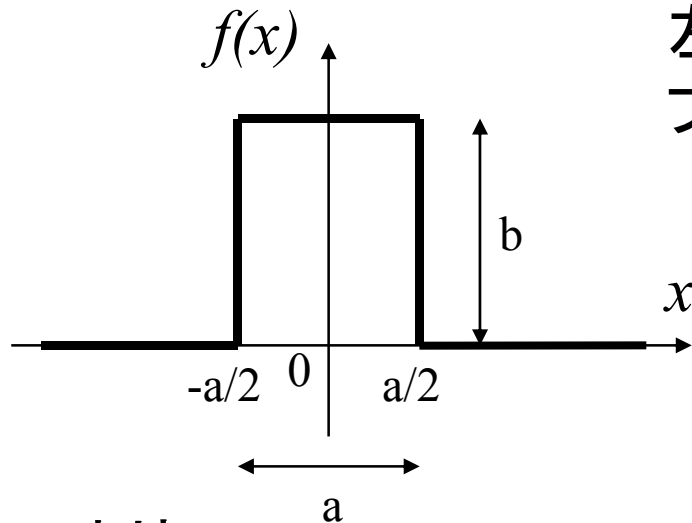
左図で与られる関数 $f(x)$ (矩形パルス)の
フーリエ変換 $F(k)$ を求めよ



$$f(x) = \begin{cases} b & (|x| < a/2) \\ 0 & (|x| > a/2) \end{cases}$$

例題2

左図で与られる関数 $f(x)$ (矩形パルス)のフーリエ変換 $F(k)$ を求めよ



$$f(x) = \begin{cases} b & (|x| < a/2) \\ 0 & (|x| > a/2) \end{cases}$$

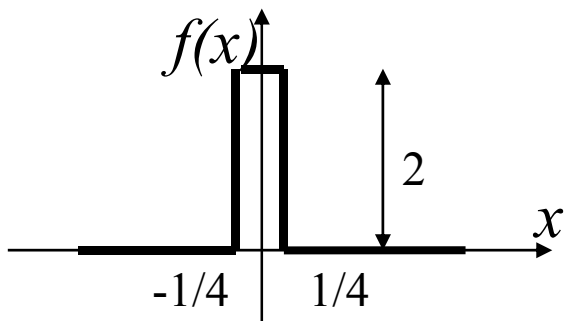
※積分の授業を思い出そう、公式集[3.9]

(4.13)より

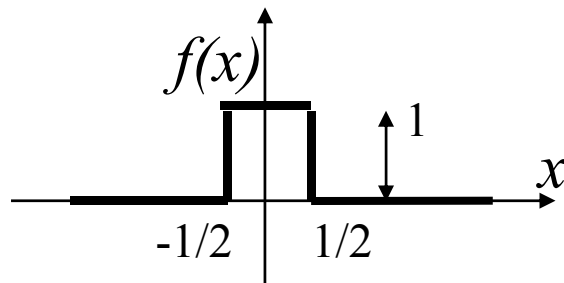
$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} be^{-ikx} dx = \left[\frac{b}{-ik} e^{-ikx} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = -\frac{b}{ik} \left(e^{-i\frac{ka}{2}} - e^{i\frac{ka}{2}} \right)$$

$$= \frac{2b \sin \frac{ak}{2}}{k} = ab \frac{\sin \frac{ak}{2}}{\frac{ak}{2}} = ab \operatorname{sinc} \left(\frac{a}{2} k \right)$$

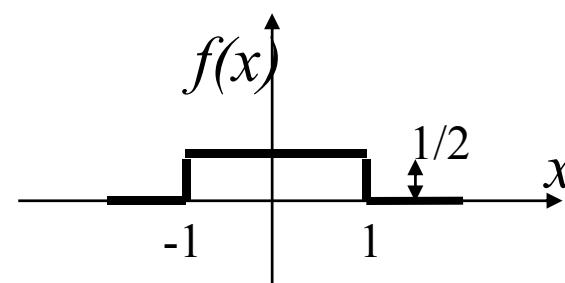
※オイラーの式 $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$ 、公式集[2.19]を使う



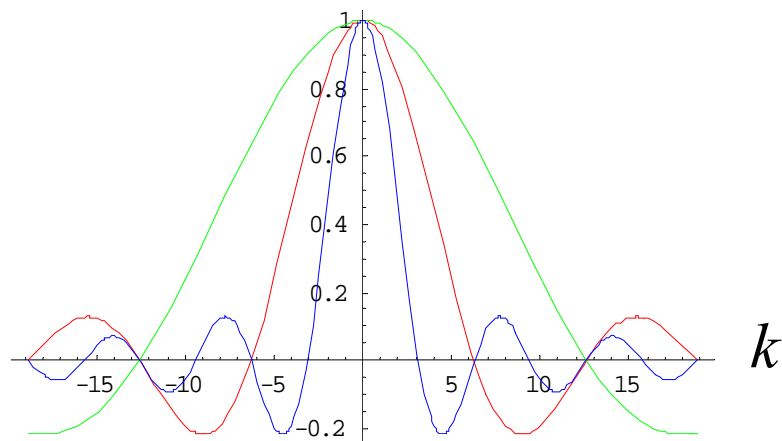
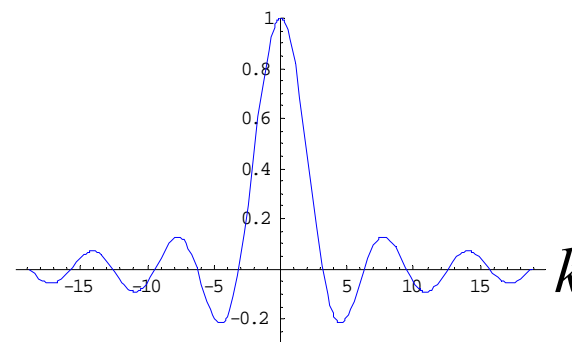
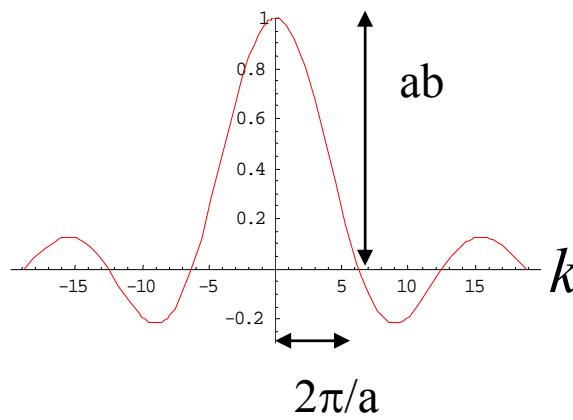
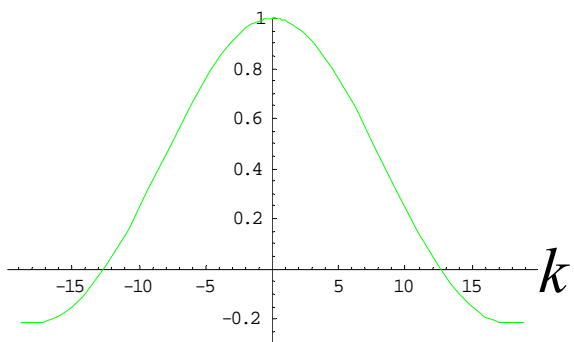
$a=1/2, b=2$



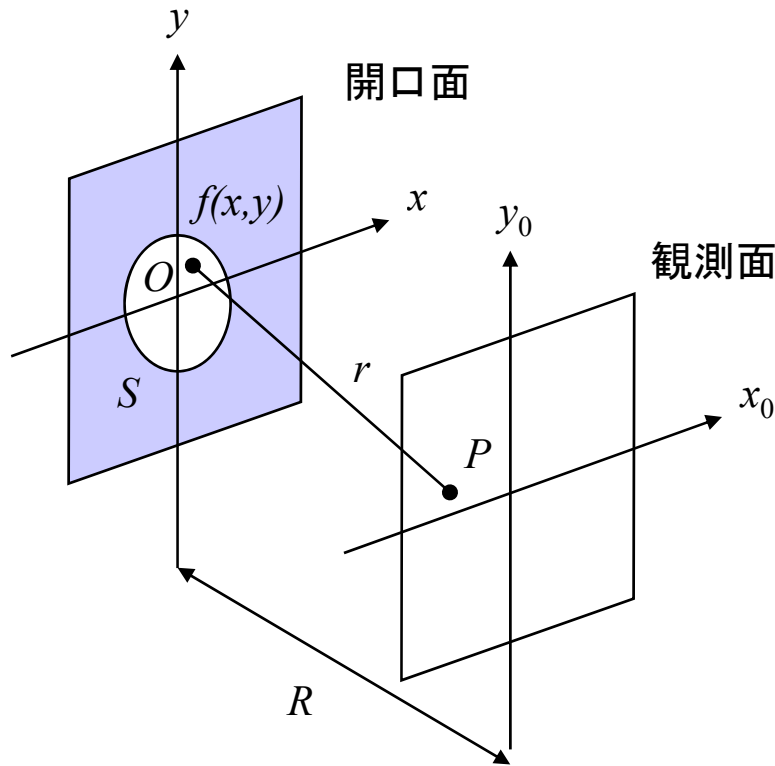
$a=1, b=1$



$a=2, b=1/2$



5.1 物理例1 フラウンホーファー回折



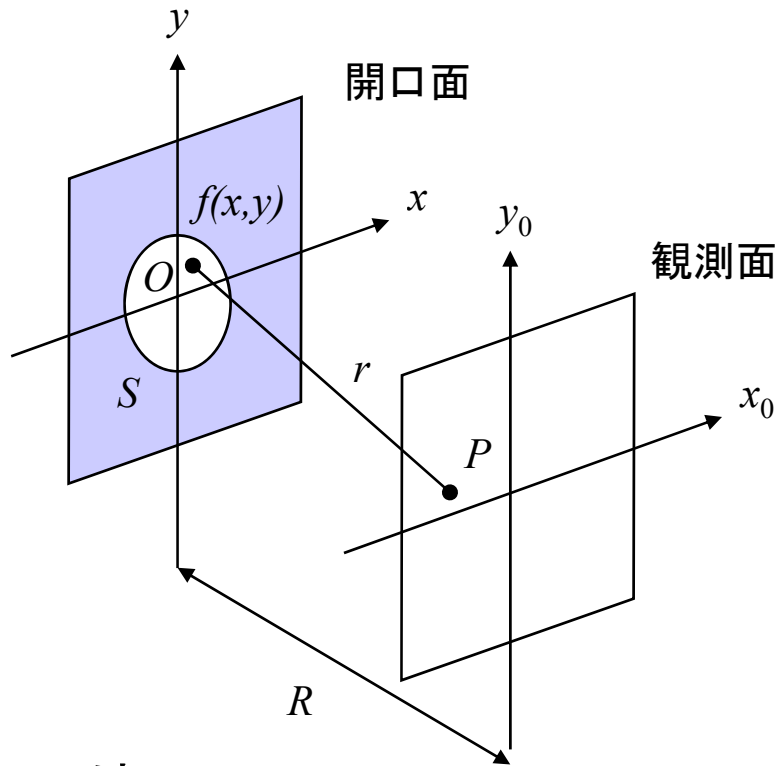
光源も観測点も無限遠
 =入射波も回折波も平面波
 スクリーン上の観測点 $P(x_0, y_0)$ に
 おける回折波の振幅

$$u_P = \int_S \frac{A \exp(ikr)}{i\lambda r} dx dy \quad (5.1)$$

開口の形を現す開口関数は

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (\text{開口}S\text{の内側}) \\ 0 & (\text{開口}S\text{の外側}) \end{cases} \quad (5.2)$$

5.1 物理例1 フラウンホーファー回折



光源も観測点も無限遠

=入射波も回折波も平面波

スクリーン上の観測点 $P(x_0, y_0)$ における

回折波の振幅: ホイヘンス-フレネルの原理

$$u_P = \int_S \frac{A \exp(ikr)}{i\lambda r} dx dy \quad (5.1)$$

開口の形を現す開口関数は

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (\text{開口}S\text{の内側}) \\ 0 & (\text{開口}S\text{の外側}) \end{cases} \quad (5.2)$$

(5.1)は

$$u_P(x_0, y_0) = \frac{A}{i\lambda R} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(ikr) dx dy \quad (5.3) \quad \text{※} 1/r \approx 1/R$$

この式は開口面に垂直な平面波が入射したときに起こる回折波の振幅分布を与える

開口面の一点から観測点Pまでの距離

$$r = \sqrt{R^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (5.4)$$

R は $(x-x_0)$ や $(y-y_0)$ に比べて十分大きいので以下のように近似できる。

$$r = R + \frac{1}{2R} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \frac{1}{8R^3} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2 + \dots \quad (5.5)$$

ここで R の条件として $R \gg \frac{1}{2\lambda} r(x^2 + y^2)$ (5.6) ※物体が10cm四方、
波長500nmで、 $R \gg 5\text{km}$
すなわち十分遠方

とすると、 $r = R + \frac{1}{2R} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = R + \frac{1}{2R} [(x^2 + y^2) + (x_0^2 + y_0^2)] - \frac{1}{R} (xx_0 + yy_0)$
 $\approx R - \frac{1}{R} (xx_0 + yy_0) + \frac{1}{2R} (x_0^2 + y_0^2)$ (5.7)

(5.7)を(5.3)に代入し、

$$u_P(x_0, y_0) = \frac{A}{i\lambda R} \exp(ikR) \cdot \exp\left[i\frac{k}{2R}(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \iint f(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{R}(xx_0 + yy_0)\right] dx dy \quad (5.8)$$

ここで

$$\begin{cases} v_x = x_0 / \lambda R \\ v_y = y_0 / \lambda R \end{cases} \quad (5.9)$$

と置くと(4.8)よりPでの振幅強度は

$$u_P(v_x, v_y) = A' \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy \quad (5.10)$$

が得られる。ただし、

$$A' = \frac{A}{i\lambda R} \exp(ikR) \cdot \exp\left[i\frac{k}{2R}(x_0^2 + y_0^2)\right] \quad (5.11)$$

ここで

$$\begin{cases} v_x = x_0 / \lambda R \\ v_y = y_0 / \lambda R \end{cases} \quad (5.9)$$

と置くと(5.8)よりPでの振幅強度は

$$u_P(v_x, v_y) = A' \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy \quad (5.10)$$

が得られる。ただし、

$$A' = \frac{A}{i\lambda R} \exp(ikR) \cdot \exp\left[i\frac{k}{2R}(x_0^2 + y_0^2)\right] \quad (5.11)$$

(5.10)はまさにフーリエ変換そのものである

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

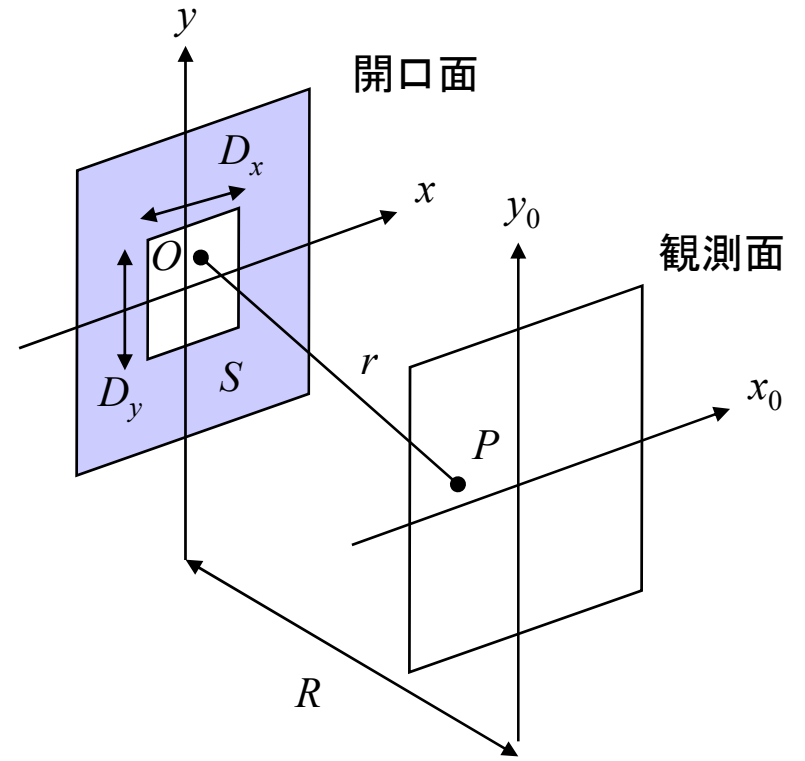
フーリエ変換そのものが光の強度分布として直接観測される

数学的な抽象的概念ではなく、

フーリエ変換そのものが一つの物理的意味を持つ

例題3

大きさが $D_x \times D_y$ の矩形開口の
フラウンホーファー回折を考える



例題3

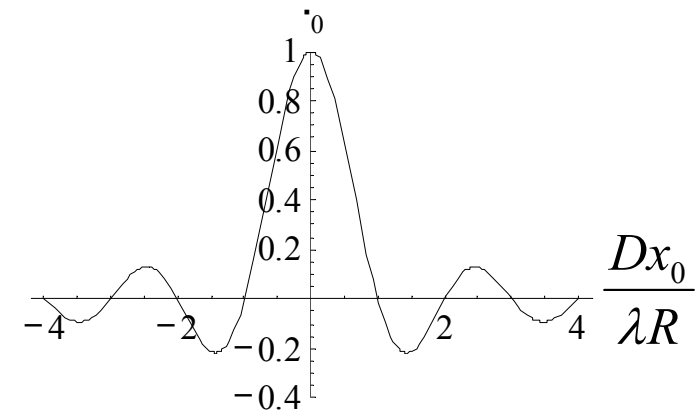
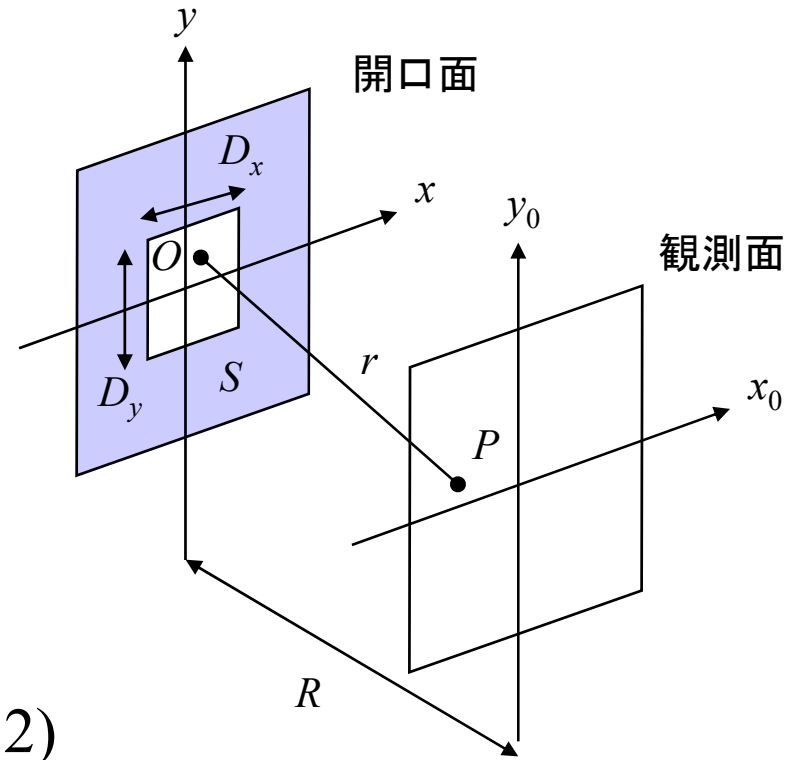
大きさが $D_x \times D_y$ の矩形開口の
フラウンホーファー回折を考える

(5.8)より観測面での回折の振幅分布は

$$\begin{aligned}
 u_P(x_0, y_0) &= A' \int_{-D_x/2}^{D_x/2} \int_{-D_y/2}^{D_y/2} \exp\left[-i \frac{k}{R} (xx_0 + yy_0)\right] dx dy \\
 &= A' D_x D_y \frac{\sin\left(\frac{kD_x}{2R} x_0\right)}{\frac{kD_x}{2R} x_0} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kD_y}{2R} y_0\right)}{\frac{kD_y}{2R} y_0} \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ と定義すると、振幅分布は

$$u_P(x_0, y_0) = A' D_x D_y \text{sinc}\left(\frac{D_x}{\lambda R} x_0\right) \text{sinc}\left(\frac{D_y}{\lambda R} y_0\right)$$



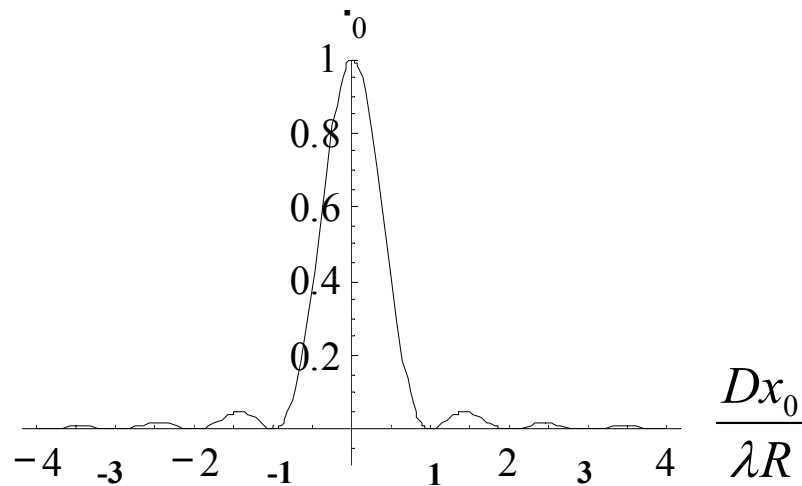
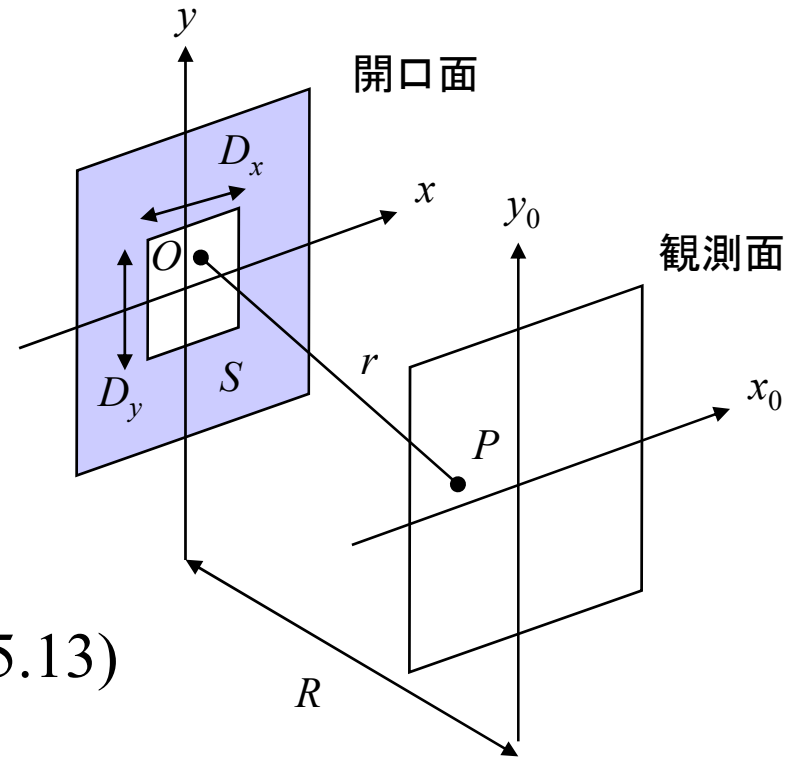
矩形開口のフラウンホーファー回折(振幅分布)

例題3

大きさが $D_x \times D_y$ の矩形開口の
フラウンホーファー回折を考える

(5.10)より観測面での回折の強度分布は

$$I_0(x_0, y_0) = [u_P(x_0, y_0)]^2$$
$$= A'^2 D_x^2 D_y^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{D_x}{\lambda R} x_0\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{D_y}{\lambda R} y_0\right) \quad (5.13)$$



矩形開口のフラウンホーファー回折(強度分布)

D=100 μ m

$\lambda=1\mu$ m

R=10m

で一次回折光の幅を
計算してみると？

5.2 例2 結晶構造解析

X線の電子による散乱を考える。

X線の入射波を平面波とする。 $u_0(\vec{r}) = A_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ (5.13)

原点から r の位置にある多数の電子群(静的な電荷の雲)による散乱

$$u_s(\vec{r}) = A_0 \frac{\varphi(\theta)}{R} \exp(ikR) \int \hat{\rho}_e(\vec{r}') \exp(-i\vec{b} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' \quad (5.14)$$

$$\hat{\rho}_e(\vec{r}) = \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad : \text{電荷密度分布} \quad (5.15)$$

X線の散乱の角度分布

$$\text{系の構造因子} \quad F(\vec{b}) = \int_{\text{系全体}} \hat{\rho}_e(\vec{r}) \exp(i\vec{b} \cdot \vec{r}) d\vec{r} \quad \vec{b} = \vec{k}' - \vec{k} \quad (5.16)$$

周期的な結晶構造の場合、 b が逆格子点の一つ h に一致したときのX線の散乱強度

$$|F(\vec{h})|^2 = |F_c(\vec{h})|^2 (N_1 N_2 N_3)^2 \quad F_c(\vec{h}) \quad : \text{結晶構造因子} \quad (5.17)$$

$$\rho_e(\vec{r}) = \frac{1}{v_c} \sum_{\vec{h}} F_c(\vec{h}) \exp(-i\vec{h} \cdot \vec{r}) \quad (5.18)$$

結晶構造因子 $F_c(\vec{h})$ は、結晶の周期的な電子密度分布 $\rho_e(\vec{r})$ のフーリエ係数に比例
X線回折から $|F_c(\vec{h})|^2$ を測定し、それから $\rho_e(\vec{r})$ を決めれば、結晶構造が求まる

例えば、音や光の振動を扱う場合、
変数 u, x が時間であるので、 $u, x \rightarrow t$ と変数の名前を変えて、
また(物理学では慣習的に)指数の符号を逆にして

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{フーリエ変換} \quad (4.15)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{フーリエ逆変換} \quad (4.16)$$

このとき

$F(\omega)$ は $f(t)$ のフーリエ変換、
 $f(t)$ は $F(\omega)$ のフーリエ逆変換という。

※孫引き注意。積分の前の係数は、その積が $1/2\pi$ であるように分ければよい。

参考文献

フーリエ解析について

1. *岩波物理入門コース10 物理のための数学* 和田三樹(岩波)
2. *物理現象のフーリエ解析* 小出昭一郎 (東大出版会)
3. *岩波講座 応用数学 Fourier-Laplace解析* 木村英紀 (岩波)
4. *物理数学の直観的方法* 長沼伸一郎 (通商産業研究社)
5. *光とフーリエ変換* 谷田貝豊彦 (朝倉)

物理数学全般について

6. *数学 -物理を学び楽しむために-* 田崎晴明 暫定版
(学習院大物理学科WEBよりPDF入手可能)
第1章だけでも良いので読んでみることをお勧めする。

本講義資料: 物質WEB > 量子物性 > 富田 > 講義情報

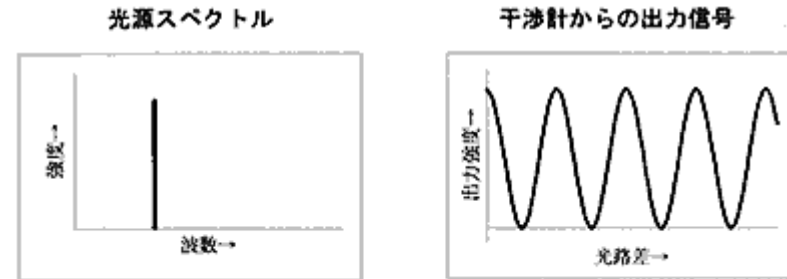
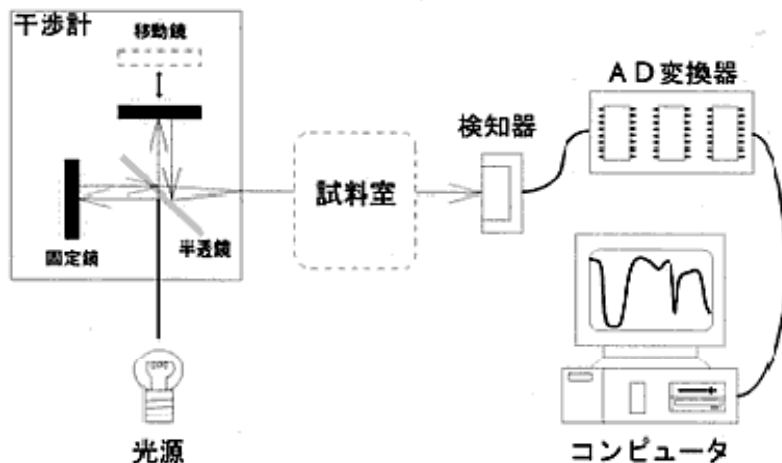
http://mswebs.naist.jp/LABs/optics/tomita/jpn/lec_j.htm

付録A: フーリエ変換分光法

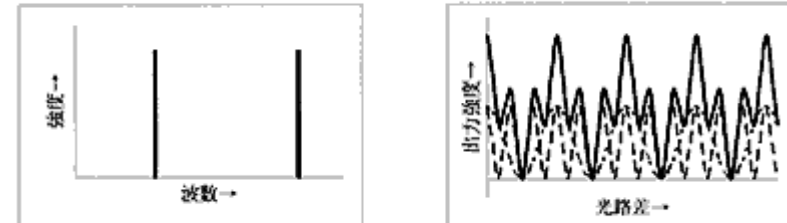
マイケルソン干渉計を用いた
干渉縞(インターフェログラム)を
余弦フーリエ変換して
スペクトルが得られる

空間分散(回折格子)を用いず、
全波数の同時検出(マルチプレクシング)

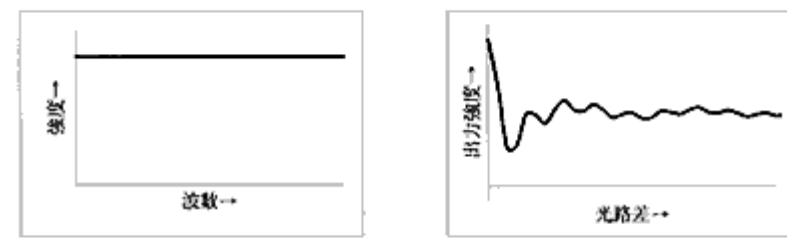
明るい、高精度
高分解能、高感度



A: 1つの単色光のとき



B: 2つの単色光のとき



C: 連続光のとき

付録B: 高速フーリエ変換(FFT)

フーリエ変換の計算量

標本数 N の自乗、 N^2 に比例: 計算量の爆発

計算量を大幅に削減できるアルゴリズム:
高速フーリエ変換(FFT)

計算量 $\sim 2N \log N$

光学、信号解析、画像処理、物理学などの分野の線形システムでの中心的な解析手法

付録C: ラプラス変換への拡張

フーリエ級数

⇒ 拡張 ⇒ フーリエ変換

⇒ 拡張 ⇒ ラプラス変換:

実用的なほぼ全ての関数に対して可能

線形微分方程式と複素関数論の融合

線形微分方程式を代数的に解く簡便な手法

(演算子法)

それが表現する動的なシステムに対する洞察

フーリエ変換の定義(3.13)式で $x \rightarrow t$ 、 iks と置くと、

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$x(t)$ のラプラス変換